L'axiomatisation et les théories économiques

Philippe Mongin

Revue économique, Vol. 54, No. 1. (Jan., 2003), pp. 99-138.

Stable URL:
http://links.jstor.org/sici?sici=0035-2764%28200301%2954%3A1%3C99%3ALELTE%3E2.0.CO%3B2-Q

Revue économique is currently published by Sciences Po University Press.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at http://www.jstor.org/about/terms.html. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at http://www.jstor.org/journals/spup.html.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact support@jstor.org.

http://www.jstor.org
Mon Feb 19 13:27:18 2007

L'axiomatisation et les théories économiques

Philippe Mongin*

Ce travail réexamine la « méthode axiomatique » avant de montrer comment elle s'applique en théorie de l'équilibre général avec Debreu, en théorie de la décision avec von Neumann et Morgenstern, en théorie normative avec Arrow, Nash et leurs successeurs. On fera ressortir ce qui différencie l'axiomatisation des autres procédés de formalisation mathématique : principalement, la notion de système formel et l'interaction réglée d'une syntaxe et d'une sémantique. On défendra l'idée que les calculs logiques constituent un modèle au moins imitable analogiquement par toutes les axiomatisations. Celles des économistes répondent au « genre ensembliste » représenté ailleurs par Bourbaki tout en présentant une forte spécificité. La sémantique y est peu formalisée et souvent fixée une fois pour toutes; les systèmes formels sont « théorématiques » plutôt que « définitionnels », suivant une distinction nouvelle introduite par ce travail. Il conduit à remettre en cause la notion d'axiomatique retenue par l'économie normative.

THE AXIOMATIC METHOD AND ECONOMIC THEORIES

This essay aims at first reconsidering the « axiomatic method », and then showing how it is implemented in Debreu' s general equilibrium theory, von Neumann and Morgenstern's theory of decision, and Arrow's, Nash's and their followers' contributions to normative economics. We separate an axiomatisation from other ways of formalization in terms of the following : first, a formal system, and second, the orderly interaction of a syntax and a semantics. We argue that logical calculi constitute a model of axiomatization that can be reproduced at least analogically elsewhere in science. Although economic axiomatizations follow Bourbaki's set-theoretic style, they exhibit strongly distinctive features. Semantics is hardly formalized, and very often kept fixed throughout. In terms of a novel distinction of this paper, the economists' formal systems are « theorematic » rather than « definitional ». We conclude by objecting to the notion of axiomatisation adopted in normative economics.

Classification *JEL* : B20, B41, C00, C70, D70

* Laboratoire d'économétrie, CNRS et École polytechnique, 1 rue Descartes, F-75005 Paris. Courriel : mongin@poly.polytechnique.fr

Différentes versions de cet article ont été présentées en 1998-2000 aux *Midis d'économie et philosophie* (École normale supérieure), au séminaire du CREME (Université de Caen), au Collège de philosophie et au séminaire *Modèles* de l'Institut Koyré. Nous remercions pour leurs commentaires détaillés M. Armatte, A. Dahan, M. Fleurbaey, F. Forges, F. Guala, A. Lapidus, A. Leroux, V. Merlin, E. Minelli, M. Salles, B. Walliser, S. Zamagni, et deux rapporteurs anonymes de la *Revue*.

INTRODUCTION

On fait gloire à Euclide d'avoir le premier mis en œuvre une méthode particulière d'examen et de présentation des résultats géométriques, l'axiomatique. Depuis lors, elle a régulièrement sollicité les réflexions des mathématiciens, des logiciens, des philosophes. Leurs conceptions se sont modifiées radicalement à la fin du XIX^e siècle et dans la première moitié du XX^e. C'est alors que la géométrie s'est libérée de l'emprise euclidienne pour s'exprimer dans des systèmes axiomatiques d'un genre nouveau; que la logique ancienne, héritée d'Aristote, a fait place à celle que l'on enseigne aujourd'hui; enfin, que des difficultés inattendues semblèrent un instant menacer l'édifice entier des mathématiques en même temps que la théorie des ensembles. Une aussi longue histoire devait aboutir à une stratification complexe de sens et d'usages. Elle se complique encore de la diffusion récente de la méthode à d'autres disciplines que la logique et les mathématiques. Des variantes plus particulièrement adaptées aux « sciences empiriques » sont apparues au XX^e siècle, avec, notamment, l'axiomatisation de la mécanique quantique et les premières axiomatisations économiques. En bref, on ne peut se réclamer aujourd'hui d'une définition simple de la « méthode axiomatique » : le premier objectif de ce travail consistera justement à en dégager la notion, tout en indiquant la manière dont elle se diversifie suivant les domaines. Le second objectif est monographique : nous étudierons les principales axiomatisations disponibles en économie théorique, en la comprenant dans un sens large qui est conforme à l'époque (nous y incluons la théorie des jeux et celle de la décision individuelle, ainsi que la théorie du choix social et ses développements, qui jouxtent la philosophie morale et politique).

Deux particularités signalent immédiatement l'utilisation que les économistes font de l'axiomatique. D'une part, elle intervient souvent dans le cours même du travail théorique, et son application peut alors représenter une avancée reconnue, alors que les axiomatisations physiques surviennent après coup et – sauf peut-être en mécanique quantique – ne passent pas pour constituer des résultats importants[1]. D'autre part, les spécificités de la méthode apparaissent insuffisamment comprises par ceux-là mêmes qui la pratiquent et la valorisent. L'économiste mathématisant trahit une difficulté certaine à distinguer la « méthode axiomatique » des autres genres de formalisation qui ont cours dans sa discipline. Quant aux adversaires de la mathématisation en économie, on ne peut évidemment pas espérer qu'ils fassent le détail parmi les différents procédés disponibles[2]. Une importance reconnue à la méthode, qu'il s'agisse de la défendre ou de la contester, un embarras persistant lorsqu'il faut la définir – ces deux traits justifieront peut-être l'étude abondante que nous lui consacrons. Elle émane d'un praticien qui se fait observateur, ou d'un observateur qui bénéficierait d'une

1. L'épistémologie comparative de Granger ([1967], p. 167 et suiv.) a mis ce contraste en évidence.

2. La récente controverse des mathématiques économiques, en France, a révélé un certain penchant à l'amalgame dans les deux camps (voir Mongin [2001a]). En ne faisant pas la part des différents styles de mathématisation, on redonne vie à de pauvres caricatures comme le conflit scolaire des « deux cultures ». En sens inverse, les recherches patientes du groupe « Modèles » de l'Institut Koyré et celles du Modelling Group à la London School of Economics auront permis de mieux comprendre la forte spécificité de ce genre mathématique. En consacrant une étude à l'axiomatisation, nous espérons compléter leur travail utile par un autre côté.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

certaine expérience. Elle excédera quelquefois la description réfléchie pour avancer des appréciations normatives.

Partant de cette idée essentielle que l'axiomatisation ne peut contenir à elle seule toutes les possibilités offertes par les mathématiques, nous la distinguerons progressivement d'autres concepts, non seulement de la *déduction*, mais, ce qui est plus délicat, de la *symbolisation* et de la *formalisation*. Ces idées se présentent différemment dans la conception « ancienne » de l'axiomatisation, à la manière d'Euclide, et dans la conception hypothético-déductive « moderne », à laquelle nous nous restreindrons, passé quelques rappels historiques. Nous laisserons de côté les questions spéciales posées par la *modélisation*, que d'autres chercheurs ont examinées avec compétence. L'idée d'axiomatisation qui se détache de toutes celles-là s'illustre par les *systèmes formels* de la logique et des mathématiques contemporaines. Faisant un pas de plus, nous soulignerons l'importance de la distinction entre *syntaxe* et *sémantique*, autrement dit entre le système formel et les objets plus concrets qu'il symbolise. Nous ne prendrons pas le mot « sémantique » dans son acception la plus ordinaire, qui concerne les significations en général. C'est en effet une thèse particulière à cet article qu'il n'y aurait pas lieu de parler de « méthode axiomatique » en l'absence d'un répondant, au moins approximatif, des sémantiques *telles que les logiciens les conçoivent*. L'axiomatique bien entendue suppose toujours un point d'ancrage extérieur; au minimum, il faut qu'une théorie antérieure permette d'attribuer des significations aux symboles muets du langage formel. Au-delà de cette exigence banale, nous demandons que l'axiomatisateur s'appuie sur une notion peut-être implicite, mais technique, de modèle sémantique. Tous les auteurs ne s'accorderaient pas avec cette manière de restreindre le sujet. Une thèse plus courante, que l'on trouve mise en exergue chez Bourbaki, souligne le *pouvoir unifiant* de la méthode. La critique des axiomatiques « univalentes », qui est liée à ce propos, est de grande importance, mais nous nous séparons de Bourbaki en faisant du rapport à la sémantique, plutôt que du pouvoir unifiant, le critère dernier de l'axiomatisation.

Ces thèses générales feront l'objet des quatre sections qui viennent. Les sections ultérieures ne traiteront plus que d'économie; elles analysent les exemples les plus couramment allégués dans la discipline quand on y traite d'axiomatique. Chacun remonte à un théoricien considérable : von Neumann pour la théorie des jeux et celle de l'utilité espérée, Debreu pour la théorie dite justement « axiomatique » de la valeur, Arrow pour celle du choix social, et Nash ou Shapley pour les développements complémentaires en économie normative. Nous verrons que ces applications vérifient l'idée précédente d'axiomatique à un certain degré d'approximation, mais que les réserves s'aggravent au fur et à mesure que l'on parcourt la liste. La distinction principale, qui semblera nouvelle aux spécialistes d'épistémologie, passe entre les axiomatiques *définitionnelles*, comme celle de Debreu, et les axiomatiques *théorématiques*, comme celles de von Neumann, et éventuellement d'Arrow ou de Nash. Ces catégories définissent des tendances, et dans la réalité de la science économique, la transition de l'une à l'autre peut se produire imperceptiblement. Il n'en reste pas moins que les premières garantissent mieux que les secondes la valeur unificatrice de l'axiomatisation sur laquelle insistait Bourbaki. Nous montrerons finalement que les axiomatiques de la décision satisfont mieux aux critères proposés que celles de l'économie normative. Les spécialistes de ce domaine qui revendiquent la méthode auraient pu décrire plus adéquatement qu'ils ne le font leur propre

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

travail. L'intérêt de celui-ci n'est pas en cause ; c'est la manière de le comprendre qui fait problème. Du point de vue de l'axiomatique, l'économie normative tombe souvent dans des simulacres triviaux. Cette critique se distingue d'une autre, plus souvent entendue, d'après laquelle on se consacrerait excessivement à l'axiomatique en économie normative.

Il est commode de partir de la différence générale entre axiomatisation et déduction. En un sens large, une axiomatisation n'est que la mise en forme *déductive* d'une théorie préalable, les propositions de cette théorie tombant soit du côté des propositions premières (les axiomes), soit du côté des propositions dérivées (les théorèmes). C'est bien ce que dit Carnap dans son *Introduction to Symbolic logic* :

> « By an axiom system we understand the representation of a theory in such a way that certain sentences of this theory (the axioms) are placed at the beginning, and from then further sentences (the theorems) are derived by means of logical deduction. » ([1958], p. 171.)

Euclide a eu l'idée géniale de présenter sous cette forme spéciale la seule théorie scientifique constituée de son temps, la géométrie des figures dessinées à la règle et au compas. Mais sans doute le mérite d'Euclide va-t-il au-delà encore. Le manuel bien connu de Blanché [1955] indique, plus nettement que ne le fait Carnap, que la déduction n'est qu'un pas vers l'axiomatisation. Celle-ci constituerait l'*achèvement* de l'idée de théorie déductive. Qu'est-ce à dire ? En quoi l'organisation axiomatique d'une théorie excède-t-elle la présentation déductive de ses raisonnements, au point que l'on ait pu parler, en relation avec celle-là, d'une méthode spécifique ?

L'AXIOMATIQUE DES ANCIENS ET CELLE DES MODERNES

Les réponses données à la question précédente ont varié dans le temps. Un rappel historique, élémentaire mais fondamental, s'impose à ce point : la méthode a connu deux modalités bien distinctes, celle des Anciens, dont les *Éléments* d'Euclide constituent le modèle insurpassable et qui perdure jusqu'à la fin du XIXe siècle, et celle des Modernes, qui s'est cristallisée vers 1900 dans les travaux de Hilbert en géométrie et de Peano en arithmétique. Suivant le point de vue des Anciens, les principes premiers (qui ne s'appellent alors pas tous « axiomes ») bénéficient d'une évidence absolue : ils sont à la fois vrais et sus comme tels, d'une vérité immédiate suivant la raison ou le sentiment. La mise en forme déductive a pour fonction de transmettre la certitude des principes aux autres propositions de la théorie, qui, moins bien loties qu'eux, ne bénéficient pas, ou pas au même degré, de cette évidence immédiate. En revanche, le point de vue des Modernes est *hypothético-déductif*, suivant une expression employée pour la première fois, semble-t-il, en 1899 chez Pieri, un disciple de Peano[1]. Suivant cette conception, qui s'est imposée par la suite, il n'est pas nécessaire que les principes et les propositions dérivées soient vrais pour qu'une relation

1. Voir Guillaume [1978]. Nous empruntons à cet article d'autres faits et les références historiques principales de ce travail. Le fascicule historique de Bourbaki [1960] a constitué une autre source précieuse.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

déductive s'établisse entre les premiers et les secondes. En même temps que l'idée de vérité, celle de certitude supérieure des principes tombe, et il ne reste finalement, pour justifier le rôle privilégié des principes, que des considérations internes à la stratégie déductive : ainsi, les axiomes doivent être cohérents, simples à formuler et peu nombreux relativement à la masse des propositions qu'ils engendrent.

Rétrospectivement, la conception ancienne de l'axiomatisation paraît donc grevée d'une confusion essentielle entre la *vérité des propositions* et la *correction des inférences*. Cette dernière propriété se définit et doit s'apprécier indépendamment de la vérité des propositions qu'elle relie, c'est-à-dire de la correction des propositions elles-mêmes. Sans doute, on exigera de toute notion d'inférence déductive correcte qu'elle transmettre la vérité des prémisses aux conséquences dès lors que les prémisses sont vraies[1]. Mais la notion d'inférence déductive correcte ne se limite pas à ce cas particulier : on peut très bien effectuer une déduction correcte à partir de prémisses fausses ou indéterminées, il suffit de les prendre comme hypothèses. Il en résulte qu'on peut entreprendre d'axiomatiser des théories qui contredisent l'intuition sensible, comme les géométries non euclidiennes, et, de même, des théories sur lesquelles l'intuition sensible ne nous informe pas directement, comme la mécanique quantique. En dissociant la notion de vérité et celle de correction logique, les Modernes se sont délivrés d'un corset qui entravait le développement mathématique de branches entières des sciences.

Plus pragmatiquement, on reprochait à la conception ancienne de rendre ses déductions incertaines, malgré la certitude supposée des principes. Ce n'est peut-être pas un accident que la 29e proposition d'Euclide ne puisse être démontrée qu'à l'aide d'un postulat qui manque à la liste des principes premiers. De telles erreurs accompagnaient régulièrement les axiomatisations des auteurs classiques : en vérifiant les enchaînements grâce à l'évidence des propositions elles-mêmes, on s'exposait à introduire des suppositions supplémentaires dans le courant du raisonnement. Dans l'opuscule célèbre *De l'esprit géométrique*, Pascal résume ainsi la méthode :

> « Cet art que j'appelle l'art de persuader, et qui n'est proprement que la conduite des preuves méthodiques parfaites consiste en trois parties essentielles : à définir les termes dont on doit se servir par des définitions claires; à proposer des principes ou axiomes évidents pour prouver la chose dont il s'agit; et à substituer toujours mentalement dans la démonstration les définitions à la place des définis. » (*Œuvres complètes*, p. 596.)

Après avoir « substitué mentalement » les notions antérieures au défini, le géomètre se demandera si la vérité apparente – la certitude – s'est transmise ou non : tel est le procédé de contrôle officiel de la conception ancienne. Mais une pareille vérification est tout sauf routinière; elle oblige à consulter l'évidence intérieure, le « cœur »; la vérité des conséquences peut être aussi éclatante que celle des principes, sans qu'il soit facile de déceler si l'une découle exclusivement de l'autre. Il est compréhensible, finalement, que Pascal ait présenté la méthode axiomatique comme une forme accomplie de l'art de *persuader*. Pour le logicien contemporain, elle ne rencontre jamais la rhétorique en son chemin.

1. Cette exigence traditionnelle demande à être reconsidérée lorsqu'on formalise l'inférence probabiliste, qui n'est pas déductive, ou que l'on cherche à étendre la notion d'inférence déductive à des contextes particuliers, comme celui des questions, des commandements, etc.

On a souvent accusé la conception ancienne de créer des démarcations arbitraires et confuses entre les principes premiers, officiellement classifiés en axiomes, postulats et définitions. Les *axiomes* étaient censés bénéficier d'une vérité plus universelle et d'une certitude plus inébranlable que les *postulats*. Les premiers relèveraient de la science en général, tandis que les seconds appartiendraient à une science donnée. Par exemple, chez Euclide, les axiomes traitent de la quantité (l'addition de deux quantités égales à des quantités égales ne change pas l'égalité, etc.), tandis que les postulats portent spécifiquement sur les objets géométriques (les figures dans le plan). Quant à la *définition*, elle a fait l'objet de longues dissensions déjà parmi les Anciens, et c'était justement l'un des buts de Pascal, dans l'opuscule cité, que d'en clarifier le statut. En effet, les définitions d'Euclide sont « créatives »; on ne sait comment les séparer des postulats ou des axiomes. L'axiomatique moderne fait justice de cette tripartition. Les propositions qu'elle considère comme premières seront désormais toutes désignées comme des « axiomes ». Comme elles ne sont premières que dans l'ordre déductif, et non pas dans un sens absolu, il n'y a plus lieu de mettre à part les postulats des axiomes. Quant à la définition, elle ne subsiste qu'en un sens limitatif et bien compris. On parlera de définition à propos d'une classe particulière d'axiomes qui ont la forme suivante : ils introduisent un terme en fonction d'autres à l'aide d'une égalité ou d'une équivalence logique, de sorte que, si on le désire, le terme défini peut être éliminé du système en même temps que sa définition.

Les introductions contemporaines à l'axiomatique signalent un autre concept de définition encore : on dit souvent que l'axiomatisation de la géométrie par Hilbert constitue la *définition implicite* des termes qu'emploient les axiomes, « point », « droite », etc. Par là, on veut indiquer que ces termes n'ont pas de signification antérieure aux axiomes, que les axiomes déterminent entièrement leur emploi correct. Encore faut-il distinguer le cas, précédemment considéré, où un terme peut être éliminé en même temps que la proposition qui l'introduit, et celui où il n'en va pas ainsi : on opposera alors la « définition explicite » du premier cas à la « définition implicite » du second. C'est là un choix terminologique possible. Mais on peut préférer dire, avec Stegmüller ([1976], p. 32), que les termes qui sont seulement « implicitement définis » ne sont pas définis du tout; cette manière de parler est sans doute plus limpide. Quelle que soit la formulation, le second cas est, pragmatiquement, le seul qui soit digne d'intérêt : si chaque axiome était éliminable en même temps que les termes qu'il introduit, l'axiomatisation serait nulle et non avenue[1].

La conception ancienne de l'axiomatisation a-t-elle joué un rôle dans l'histoire de la science économique ? Elle présente une forme de parenté avec une représentation longtemps prédominante, suivant laquelle la discipline procéderait déductivement à partir d'un point de départ certain. Quelle que soit l'origine, *a priori* ou *a posteriori*, des principes, ils seraient connus sans aucun doute possible. Ils se rencontreraient d'ailleurs en petit nombre et seraient faciles à séparer; substantiellement, ils ne concernent guère que la recherche de la satisfaction matérielle et les formes élémentaires de l'échange. Des principes, la

1. Une notion de définition apparaît aussi en sémantique formelle, où elle revêt un sens technique particulier. On dit que certaines classes d'objets sémantiques sont définissables dans le langage si on peut les identifier à l'aide de formules de ce langage.

théorie déduirait des lois, qui, en présence de certaines hypothèses factuelles, détermineraient à leur tour des régularités. La représentation *déductive* des enchaînements est, pour l'essentiel, commune à l'économie politique classique et à l'économie néo-classique du tournant du siècle; elle s'accorde dans l'ensemble avec la pratique contemporaine; aux différentes étapes, la méthodologie économique l'a cautionnée. En revanche, la *certitude des principes* oppose les économistes traditionnels et ceux qu'influence le positivisme logique, donc bon nombre des économistes contemporains. Les premiers attribuaient la certitude aux principes, tandis que les seconds adoptent à leur sujet, officiellement du moins, le point de vue hypothético-déductive moderne. Certes, la conception d'autrefois se dissociait dès qu'elle abordait l'origine de la certitude, et il est facile d'opposer, à cet égard, l'empirisme de John Stuart Mill dans le *System of Logic* (1843) et l'apriorisme d'un Ludwig von Mises dans *Human Action* (1949). Mais ni le contenu qualitatif des principes élémentaires, ni, surtout, l'affirmation de leur évidence, ne séparait ces auteurs. Selon toute apparence, donc, leurs thèses appellent l'analogie de l'axiomatique ancienne et, en particulier, de la géométrie euclidienne.

De fait, on rencontre souvent des allusions valorisantes à Euclide sous la plume des économistes du XIXe siècle. James Mill est l'un des premiers à s'en réclamer. Dans un article de l'*Edinburgh Review*, on lit ce passage curieux : « la proposition élémentaire suivant laquelle les monopoles sont désavantageux » admet une « démonstration aussi parfaite qu'elle peut l'être chez Euclide[1] ». Après lui, d'autres fileront la métaphore[2]. Il serait distrayant d'en suivre la diffusion en même temps que celle d'une formule qui, pour n'être pas moins valorisante, emprunte à un registre scientifique différent : le « newtonisme moral ». Mais il ne faut pas forcer les rapprochements qui s'ébauchent dans de tels passages : ils révèlent seulement une inspiration générale et lointaine, dominée par l'emphase rhétorique; la comparaison avec Euclide a d'abord pour but d'accentuer flatteusement l'importance et la nouveauté du sujet traité.

Les économistes classiques et les premiers économistes néo-classiques procèdent sans doute déductivement, mais ils ne font pas d'effort systématique pour isoler l'ensemble des principes qu'ils déclarent certains et pour s'astreindre ensuite à n'employer qu'eux. Au contraire, comme on le voit chez Ricardo, ils font librement et consciemment appel aux principes suivant les besoins du raisonnement, ce que la méthode euclidienne proscrit, comme toute méthode axiomatique au demeurant. En outre, les propositions économiques ne préexistent généralement pas à leur mise en forme déductive – ce qui est le cas chez Euclide et, encore une fois, dans l'axiomatique en général. Cette différence majeure est à rapprocher d'une observation que l'on a souvent faite : chez les économistes classiques et les premiers néo-classiques, la déduction à partir des principes est non seulement un moyen de mise en ordre, mais un *procédé heuristique*. Il est sans doute vrai que, comme les propositions premières d'Euclide, les principes économiques sont à la fois généraux et peu nombreux, mais cela résulte de la matière elle-même et de l'abstraction de la démarche suivie, et non pas d'un effort de réduction mené après coup. En outre, on ne retrouve jamais, à notre connaissance, la distinction des axiomes, postulats et définitions. Ce qui s'est

1. Cité par Halévy [1901], éd. de 1995, p. 248.
2. À commencer par John Stuart Mill dans l'essai *On the Definition of Political Economy* (1836).

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

transmis aux économistes du modèle euclidien ne va guère au-delà des ornements que lui emprunte Spinoza dans l'*Éthique*. Il ne nous paraît pas rigoureux de faire remonter l'axiomatisation économique au XIX^e siècle, comme certains l'ont proposé[1].

Les considérations sur la « méthode axiomatique » ne pénétreront véritablement la discipline qu'à un moment où, grâce au positivisme logique, la conception moderne s'était partout diffusée. Dans la section 6, nous datons les premières axiomatiques économiques de 1944, avec von Neumann et Morgenstern, ce qui frappera le lecteur comme singulièrement tardif. Elles interviennent à un moment où la conception ancienne de l'axiomatisation faisait déjà figure de curiosité historique. Même aux yeux d'un von Mises, partisan attardé de la certitude immédiate des principes économiques, il n'existait plus qu'une seule « méthode axiomatique », celle de la conception moderne. Cet auteur développe une thèse méthodologique ancienne en sachant qu'il ne peut plus se prévaloir d'Euclide. La conception moderne, seule disponible, étant inadéquate aux besoins de la « praxéologie », il n'y aura tout simplement pas d'axiomatisation des principes économiques. Telle est la position révélatrice de von Mises[2]. Ce serait une autre naïveté, pire que la précédente, que de croire que l'axiomatique des Anciens aurait survécu chez les économistes alors qu'elle avait disparu ailleurs.

SYMBOLISATION, FORMALISATION, AXIOMATISATION. LES SYSTÈMES FORMELS

La conception moderne de l'axiomatique vient seulement d'être esquissée. Avant de l'approfondir, il importe de distinguer entre l'axiomatisation, la symbolisation et la formalisation – trois concepts que, nous le verrons, les économistes ne séparent pas bien. La *symbolisation* est un procédé technique consistant à remplacer des signes formés dans un langage par des signes d'un autre langage, le remplacement étant uniforme et cohérent. Plus particulièrement, elle consiste à remplacer des mots de la langue naturelle par les signes d'une langue artificielle, qui est soit empruntée, soit créée pour la circonstance. C'est ainsi que Peano utilise la notation $S(n)$ au lieu de l'expression « successeur de n », ou que les microéconomistes remplacent l'expression « demande du consommateur » par un vecteur d'espace euclidien. La *formalisation* est encore un procédé technique, mais d'une espèce plus subtile. Elle consiste à traiter les signes en faisant abstraction des significations qu'on leur attribue[3]. Traiter les signes, cela veut dire : les transformer les uns dans les autres, les regrouper, les dissocier, en un mot, effectuer sur eux des opérations. En droit, la formalisation est indépendante de la symbolisation. Lorsque, dans une boutade célèbre, Hilbert affirmait que les géomètres pourraient écrire « table », « chaise », « chope » au lieu de « point », « droite », « plan », il indiquait non seulement que le choix des signes est arbitraire par rapport aux significations préétablies, mais aussi – c'est une conséquence moins évidente du propos – que la langue naturelle peut très bien fournir les signes arbitraires à employer. On peut donc, à la rigueur, concevoir une

1. On a pu la faire remonter jusqu'à l'*Outline of the Science of Political Economy* de Senior (1836).
2. [1949], p. 39, et plus nettement, [1976], p. 14-15.
3. Et de ce qu'ils *représentent*, si tant est qu'il faille distinguer entre signification et référence.

formalisation en l'absence d'une langue artificielle, et donc en l'absence de toute symbolisation préalable. Mais c'est là un cas limite, et peu naturel. Le principe de la formalisation, qui consiste à opérer sur des signes indépendamment de ce qu'ils signifient, ne s'accomplit vraiment qu'au prix d'un certain degré de symbolisation. Celui-ci peut être minime. Quand on symbolise par la notation fonctionnelle $u(x)$ la satisfaction qu'apportent à un consommateur différents paniers de consommation, et que l'on étudie, par dérivation de $u(x)$, les conditions nécessaires à l'existence d'un maximum de $u(x)$, on a déjà formalisé (quoique modestement !) la théorie du consommateur. Le moment spécifique de la formalisation intervient ici lorsqu'on dérive la fonction $u(x)$ sans prêter attention à ce qu'elle signifie. Le moment de la symbolisation a précédé celui-ci et, dans cet exemple comme dans beaucoup d'autres, il l'aura conditionné. Il est facile, en sens inverse, de concevoir *une symbolisation sans formalisation*. Les organigrammes des gestionnaires ou des informaticiens s'apparentent à la première plutôt qu'à la seconde. Les arbres symbolisent les problèmes de décision à plusieurs étapes ; on se sert de graphes, ou de matrices inputs-outputs, pour représenter symboliquement les relations entre fournisseurs et clients dans l'économie. Tant que ces représentations fonctionnent comme simples rappels des objets et ne prennent pas leur autonomie, elles ne constituent pas encore des formalisations[1].

Qu'en est-il alors de *l'axiomatisation* ? Dans la conception ancienne, elle n'est dépendante ni de la formalisation, ni de la symbolisation, ce qui mérite d'être souligné parce que l'on tend, aujourd'hui, à regrouper les trois notions. Carnap ([1958], p. 172) a fait valoir que la conception moderne pouvait, à la rigueur, se passer de l'une et de l'autre. De fait, les premières axiomatiques conformes à l'idéal hypothético-déductif, à la fin du XIX[e] siècle, se sont formulées en langue naturelle, sans que les règles d'opération se distinguent de celles qui régissent l'usage ordinaire du discours. Cet état intermédiaire paraît assez bien reflété dans les *Leçons sur la nouvelle géométrie* de Pasch [1882] et dans l'axiomatisation, pourtant considérée comme définitive, que Hilbert fit de la géométrie euclidienne (*Grundlagen der Geometrie*, 1899). Mais de même que la formalisation ne s'accomplit complètement qu'au prix d'une symbolisation préalable, de même l'axiomatisation, au sens moderne, demande la formalisation, et donc la symbolisation, pour réaliser ses potentialités. Aussi longtemps que l'on n'isole pas les règles permettant d'agir sur les signes, la liaison déductive entre axiomes et théorèmes risque d'être contaminée par les significations. Réussie pour l'essentiel par Peano en 1889, c'est la jonction entre formalisation et axiomatisation qui a permis d'établir définitivement la valeur strictement hypothético-déductive de celle-ci. La remarque de Carnap mentionnée au début de ce paragraphe est certainement subtile, mais elle ne va pas à l'essentiel.

Non seulement les économistes se sont d'emblée fixés sur l'axiomatique des Modernes, mais encore ils en ont largement évité les prodromes, ce qui est un avantage indiscutable. On trouverait sans doute quelques systèmes hypothético-

1. Le logicien Kleene [1952] distingue pour sa part entre symboles et marques : tous deux sont des signes, mais les symboles supposent une présence au moins latente des significations, tandis que les marques ne les supposent pas et sont de simples empreintes physiques. Dans cette terminologie spéciale, on dirait que la formalisation se développe lorqu'on commence à traiter les symboles comme des marques. Dieudonné [1939] parle en un sens voisin de « signes purs ».

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

déductifs incomplètement formalisés, comme l'étaient ceux de Pasch ou du Hilbert de 1899. On peut à la rigueur lire ainsi la monographie d'Arrow, *Social Choice and Individual Values* [1951]; nous y reviendrons. D'autres exceptions sont purement apparentes : elles s'expliquent en fait par les préoccupations argumentatives particulières des auteurs. Pour ne donner qu'un exemple, Friedman et Savage [1948] ont proposé une axiomatisation de l'utilité espérée qui est en partie informelle. Leur article paraît à un moment où les axiomatiques formalisées de l'utilité espérée existent déjà ou s'élaborent, grâce à Savage [1954] notamment; il sert de complément didactique aux travaux qui font autorité.

Les deux démarches de l'axiomatisation et de la formalisation se réunissent dans l'idée de *système formel*, dont la logique élémentaire fournit les exemples paradigmatiques. Le calcul propositionnel constitue le plus simple des systèmes formels existants. Il peut fournir une illustration tangible des idées générales exposées jusqu'à présent et de quelques autres qui s'enchaînent avec elles. Les logiciens lui attachent peu d'importance parce qu'il n'est qu'un fragment du seul calcul qui soit fondamental à leurs yeux, le calcul des prédicats; nous ne l'envisageons qu'à titre illustratif. Comme les axiomatisations de la géométrie et, *a fortiori*, celles des « sciences empiriques », le calcul propositionnel part d'une théorie préalable informelle, mais déjà constituée. En l'occurrence, ce qu'il symbolise, formalise et axiomatise est l'usage des mots « non », « implique », « et », « ou », lorsqu'ils servent à composer des propositions complexes à partir de propositions plus simples ou lorsqu'ils interviennent dans certaines inférences. Les inférences considérées sont exclusivement celles qui dépendent de ces mots (appelés *connecteurs* par le logicien)[1]. Plus précisément, c'est l'emploi des connecteurs par le mathématicien, plutôt que dans la langue quotidienne, plus ambiguë, que le calcul propositionnel représente axiomatiquement (le « ou » est non exclusif, et le « implique » admet une possibilité de validation triviale). Que le calcul propositionnel se réfère ultimement à une pratique ne signifie pas qu'il ait sauté l'étape de la théorie informelle : pour s'en convaincre, il suffit de relire les écrits des fondateurs, Frege et Russell, ou plus simplement de feuilleter n'importe quelle *Beginners' logic* d'aujourd'hui.

Le système formel du calcul propositionnel comporte des règles morphologiques définissant les formules complexes à partir des formules plus élémentaires et des connecteurs; un petit nombre d'axiomes liant entre elles certaines formules; et une règle d'inférence unique (le modus ponens). Appliquée de façon répétée aux axiomes, la règle permet de prouver des théorèmes. Comme les autres notions, celles de preuve et de théorèmes sont formellement définies, et il en va de même de celle de conséquence logique.

À propos d'un système formel quelconque, on peut poser les questions classiques de la *cohérence* (ou *consistance*), de l'*indépendance*, et de la *décidabilité*. Le système est cohérent si l'on ne peut pas en dériver comme théorème une contradiction (notion qui est aussi formellement définie). Les axiomes choisis sont indépendants si aucun d'eux ne peut être obtenu comme théorème en utili-

1. Ces inférences sont à distinguer de celles qui exploitent la structure relationnelle interne des propositions : le calcul des prédicats peut les traiter, mais non pas le calcul propositionnel. Le calcul propositionnel permet d'analyser l'inférence : « Socrate est un homme et Socrate est mortel, Donc Socrate est mortel », mais non pas le syllogisme familier : « Socrate est un homme, Tous les hommes sont mortels, Donc Socrate est mortel. »

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

sant seulement les autres. Le système est décidable si, pour chaque formule, on peut décider à l'aide d'une procédure *finie* si cette formule est un théorème ou non. Le calcul propositionnel satisfait aux propriétés de cohérence et de décidabilité, et on lui connaît de multiples systèmes indépendants. Le résultat de décidabilité le met à part – avec certains systèmes apparentés – de la plupart des systèmes formels connus. Sous l'influence de Hilbert (celui des *Grundzüge* de 1928, écrits avec Ackermann), les logiciens et les mathématiciens en vinrent à valoriser considérablement cette dernière propriété. Elle garantit, intuitivement parlant, que le système reste maîtrisable, « effectif » (avec le temps nécessaire, une machine pourrait vérifier si une formule donnée est un théorème ou non). Or – c'est un des apports fondamentaux, quoiqu'il soit négatif, de la logique formelle – on peut *démontrer* l'*indécidabilité* de nombreux systèmes élémentaires en logique et en mathématiques. Pour l'arithmétique de Peano et les systèmes qui l'incluent, c'est une conséquence du très célèbre théorème publié par Gödel en 1934. Même le système logique le plus fondamental, qui est le calcul des prédicats, n'est décidable qu'en un sens affaibli; c'est un résultat de Church en 1936[1].

On ne pouvait éviter de mentionner, même aussi schématiquement, les grands théorèmes de limitation. Il faut se résigner au fait que le « problème de décision », suivant l'expression de Hilbert, ou bien reçoive une réponse négative, ou bien n'ait pas de réponse claire dans la plupart des cas considérés[2]. L'exemple du calcul propositionnel reste exceptionnel. Mais il nous aura servi du moins à illustrer les idées générales de l'axiomatique comprise au sens des systèmes formels. Tout d'abord, il illustre la démarche *entièrement explicite* des axiomatisations logiques : rien n'est sous-entendu, les transformations sur les signes qui ne sont pas expressément décrites ne sont pas autorisées. Il illustre ensuite le caractère hautement *contraint* des axiomatisations logiques : en l'occurrence, le nombre infini des théorèmes du calcul propositionnel résulte d'une manière exclusivement « finitiste » de procéder (les preuves sont par définition de longueur finie et s'appliquent à un stock lui-même fini de schémas d'axiomes). Tous les calculs logiques et, *a fortiori*, tous les systèmes formels existants ne manifestent pas le degré d'explicitation maximal du calcul propositionnel, et tous ne manifestent pas le même degré de contrainte, loin s'en faut. Cette dernière considération n'est d'ailleurs pas sans lien avec la question de l'indécidabilité. Mais tous les systèmes formels manifestent les deux tendances analogiquement et dans l'esprit.

L'observation précédente achève de clarifier les rapports entre formalisation et axiomatisation. Il y a beaucoup plus dans celle-ci que l'idée d'un symbolisme devenu autonome, à quoi se ramène la formalisation. On ne parlera d'axiomatisation qu'en présence des trois propriétés correspondant *au moins analogiquement* à celles des systèmes formels de la logique et du calcul propositionnel en particulier. *(i)* La formalisation choisie délimite explicitement et définitivement

1. L'article de Gödel figure avec différents commentaires dans le recueil de Shanker [1988]. Le lecteur appréciera sans doute la synthèse accessible proposée par Andler [1990].

2. Les théorèmes de limitation ont mis fin au programme « formaliste » de reconstruction des mathématiques dont Hilbert s'était fait le héraut dans les années 1920. Ce dénouement célèbre est bien exposé, par exemple, chez Andler [1990]. Nous signalons plus loin que le théorème de Gödel a joué un rôle important dans l'évolution de von Neumann.

les propositions qu'elle prend comme premières. *(ii)* Même si elle ne spécifie pas une notion de règle d'inférence[1], elle délimite au moins implicitement les opérations autorisées sur les signes. *(iii)* Elle s'impose, et cela reste de nouveau le plus souvent implicite, une contrainte générale d'« effectivité » : la plus évidente est le choix d'un ensemble fini de propositions premières; en un sens plus vague, qui demande à être confronté à d'autres objectifs, on s'efforce d'en limiter le nombre.

Les économistes atténuent la différence entre formalisation et axiomatisation dans leurs propos ou leurs réflexions beaucoup plus que dans la réalité de leur travail. Chez von Neumann et Morgenstern [1944] et les théoriciens des jeux et de la décision, chez Debreu [1959, 1984, 1986] et ses successeurs, chez les théoriciens du choix social, on trouve un répondant, net ou affaibli suivant les cas, des conditions nécessaires *(i)*, *(ii)* et *(iii)*. Il se trouve aussi que la plupart de ces auteurs ont une idée satisfaisante de ce qu'est un système formel, même s'ils ne l'expriment pas avec les mots des logiciens. En dehors de ces trois secteurs, on rencontre beaucoup de formalisations, mais peu de systèmes formels authentiques ou approchés, donc peu d'axiomatisations. C'est dans cet *ailleurs*, qui représente en fait le gros de la discipline, que la description du travail s'éloigne le plus de ce qu'il est : les concepts de modèles mathématiques, axiomes, formalismes, se chevauchent et se bousculent dans l'esprit du praticien (d'où certains mariages linguistiques inopinés, comme « modèle axiomatique » ou « axiomatique informelle »). La méthodologie économique n'a pas joué le rôle clarificateur qu'on attendait d'elle à cet égard[2].

Les trois groupes de théories que nous avons isolés du reste constituent-ils des exemples rigoureux d'axiomatisations ? On ne peut pas répondre à cette question avant d'avoir développé les autres propriétés essentielles de la méthode axiomatique. Car la constitution de systèmes formels ne suffit pas encore à la caractériser; nous n'aurons donné une idée complète de la méthode qu'au terme des deux sections suivantes.

SYNTAXE ET SÉMANTIQUE. L'AXIOMATISATION À LA MANIÈRE DES LOGICIENS

À ce point, nous avons traité de la méthode axiomatique au point de vue des systèmes formels et de leurs constituants, langage, axiomes, règles d'inférence. Depuis Carnap, on a coutume d'englober ces objets sous l'appellation de *syntaxe*, le mot désignant aussi l'étude que l'on peut en faire. En ce dernier sens, la syntaxe est donc *l'analyse des signes pris en eux-mêmes*, abstraction faite de

1. Carnap ([1958], p. 171) met en avant ce critère; mais il paraît trop strict pour s'appliquer au-delà des calculs logiques, et il ne peut être question de ramener les systèmes formels à ceux-là seulement.

2. Il vaut mieux signaler des exceptions que d'approfondir la critique. Dû à Vilks, l'article « Axiomatization » du *Handbook of Economic Methodology* (1998) présente rigoureusement le sujet; voir aussi Vilks [1995]. Stigum ([1990], chap. 1-2) met en valeur certaines particularités de l'axiomatisation, mais la distinction qu'il propose avec la formalisation n'est pas la nôtre (pour lui, une formalisation se définit par la possibilité d'employer le calcul des prédicats, ce qui nous semble trop restrictif). Nous avons, d'autre part, signalé le travail que certains poursuivent autour de la notion de modèle.

ce qu'ils veulent dire ou représentent. La syntaxe n'est pas le tout de la méthode axiomatique. Nous avons déjà indiqué que les systèmes formels étaient inspirés par des théories informelles antérieures. Une fois qu'ils sont mis en place, ces théories heuristiques entrent avec eux dans un rapport d'interprétation à symbole : le système formel, pris dans son ensemble, *symbolise* la théorie informelle, prise dans son ensemble. Il faut examiner plus avant la nature de ce rapport de symbolisation, évidemment plus complexe que le rapport de symbolisation générique entre une chose et le signe qui la représente. Le système formel représente-t-il exactement la théorie informelle? Si ce n'est pas le cas, qu'a-t-on préservé, qu'a-t-on perdu, qu'a-t-on ajouté, en passant de la théorie informelle au système formel? La symbolisation a-t-elle un caractère conventionnel? De quelle manière peut-on la perfectionner? Ces questions appartiennent au champ de discussion que, avec Carnap toujours, on appelle *sémantique*. À son tour, le mot vise à la fois une classe d'objets et l'étude qu'on en fait; sous ce rapport, il désigne *l'analyse des signes vus dans leurs rapports aux significations et à la vérité*. La sémantique est un complément indispensable de la syntaxe. Les questions qu'elles traitent découlent naturellement de la constitution des systèmes formels comme objets autonomes.

Jusqu'à la dernière guerre mondiale environ, les logiciens pouvaient avoir l'impression que la sémantique n'atteindrait pas le niveau de rigueur de la syntaxe, et que les questions précédentes, pour légitimes qu'elles fussent, ne relevaient pas véritablement d'un traitement technique. Le développement dans l'après-guerre, avec Tarski notamment, de la *théorie des modèles*, a fait justice de cette impression. En relation avec certains systèmes formels tout au moins, il est devenu possible de formaliser aussi la sémantique. En substance, la théorie des modèles donne au calcul des prédicats une contrepartie du côté des interprétations, grâce à la notion ensembliste de *modèle*, puis elle formalise, grâce à la notion également ensembliste de *satisfaction*, les rapports de signification et de vérité que les formules du système entretiennent avec les modèles[1]. Le mystère apparent de la notion de vérité, qui rebutait les positivistes logiques et Popper lui-même au point que, dans les années 1930, ils l'avaient exclue de la philosophie, se dissipe une fois que l'on examine les constructions mathématiquement rigoureuses de la théorie des modèles, toutes fondées sur la théorie des ensembles ordinaire[2].

Nous détaillerons quelque peu la sémantique des deux calculs logiques les plus courants. Le calcul propositionnel n'a qu'une seule notion sémantique, la fonction de *valuation*. Elle attribue une valeur de vérité à chaque formule atomique et, indirectement, à chaque formule complexe aussi, parce qu'elle est tenue de respecter les tables de vérité des connecteurs. Quand on passe au calcul des prédicats, les notions de modèle et de satisfaction se dégagent pleinement. Un modèle du calcul des prédicats comporte un ensemble, le *domaine*, qui sert à interpréter les variables, ainsi que d'autres objets ensemblistes définis sur ce

1. On dit souvent « structure » et « validité » au lieu de « modèle » et « satisfaction ».

2. Le positivisme logique des années 1930 a contribué à diffuser la « méthode axiomatique » dans sa version hypothético-déductive moderne, ce qui était utile, mais il en a fourni une version tronquée ou trompeuse, parce qu'elle était presque exclusivement syntaxique. Il est moins pardonnable qu'aujourd'hui encore, après le développement des sémantiques tarskiennes, on décrive parfois la méthode au point de vue, seulement, des opérations aveugles sur les signes.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

domaine, typiquement, des *relations* et des *fonctions*. Celles-ci traduisent les symboles relationnels et fonctionnels de la syntaxe. La sémantique du calcul des prédicats distingue deux rôles des modèles, l'attribution préalable de signification, qui concerne les variables, et l'attribution de vérité, ou satisfaction, qui concerne les formules. Les clauses de satisfaction des formules font intervenir à la fois les connecteurs propositionnels et les quantificateurs, universels et existentiels, qu'elles contiennent. Les précisions techniques ne nous importent pas; il suffit d'indiquer que les modèles du calcul des prédicats font l'objet d'une *définition formelle*, aussi bien que la phrase « le modèle m satisfait la formule j ».

Quelles que soient la syntaxe et la sémantique retenues, la langue de la première sera plus stricte que celle de la seconde. Celle-ci a, par rapport à celle-là, le rôle technique d'une *métalangue* : la sémantique sert à « parler de la syntaxe ». Pour cette raison, elle doit l'englober (tout ce qui peut être exprimé dans la syntaxe doit pouvoir l'être aussi dans la sémantique) et l'excéder (il lui faut des termes supplémentaires pour *nommer* ceux de la syntaxe). Les sémantiques formelles se contentent généralement d'exploiter les facilités de la mathématique ordinaire. Pour le calcul propositionnel et celui des prédicats, elles ne supposent rien d'autre que la théorie des ensembles « naïve » : l'usage de la notion d'appartenance et des opérations d'union, d'intersection, de complémentation et d'inclusion; la définition des produits d'ensembles et celle des relations ou des fonctions comme parties d'un produit, et ainsi de suite[1]. Dans le cas d'autres calculs, la sémantique peut s'enrichir, par exemple en incluant des notions de topologie ou de mesurabilité, ou encore en faisant référence aux nombres réels. Ces notions sont plus complexes que celle de la théorie « naïve » des ensembles, mais relèvent d'elle encore, puisqu'elle est tout ce dont on a besoin pour engendrer l'ensemble des mathématiques.

À partir du moment où l'on a formalisé, au sens qui vient d'être dit, le rapport des interprétations au système, il est loisible de reprendre rigoureusement les questions de la sémantique intuitive, qui ouvraient les développements de cette section :

1. Le système permet-il de démontrer que ce qu'on trouve de commun aux interprétations? Cette question imprécise devient maintenant : les théorèmes du système sont-ils satisfaits dans tout modèle? Si oui, on dit que le système est *adéquat*.

2. Le système permet-il de démontrer tout ce qu'on trouve de commun aux interprétations? Cette question imprécise devient maintenant : les formules satisfaites par tous les modèles à la fois sont-elles des théorèmes du système? Si oui, on dit que le système est *complet*.

Si le système formel vérifie les deux propriétés de complétude et d'adéquation, on peut, en revenant à une autre idée du début de la section, soutenir qu'*il symbolise convenablement les interprétations*. En effet, l'adéquation indique qu'il ne prouve pas trop (tout ce qu'on prouve est une vérité), et la complétude qu'il prouve suffisamment (toutes les vérités peuvent être prouvées). Le calcul des propositions comme celui des prédicats font justement l'objet des théorèmes

1. On distingue traditionnellement la théorie « naïve » des ensembles et les théories axiomatiques, dont la principale est celle de Zermelo-Fraenkel (ZF). Quelques travaux de logiciens formalisent la sémantique dans une théorie axiomatique des ensembles, mais ils forment l'exception plutôt que la règle.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

d'adéquation et de complétude. Avec ces résultats bien connus, la logique offre à l'ensemble des sciences un modèle entièrement rigoureux de la méthode axiomatique.

Malheureusement, les deux exemples du calcul propositionnel et du calcul des prédicats sont voués au statut d'exceptions. Les systèmes dotés d'une sémantique formelle – il en existe de nombreux autres exemples en logique – vérifient facilement l'adéquation; mais la propriété de complétude leur fait le plus souvent défaut. Le théorème de Gödel déjà mentionné implique, à titre de variante, ce résultat justement célèbre : il existe une formule de l'arithmétique vraie dans le modèle ordinaire (celui des nombres entiers, doté de l'addition et de la multiplication aux sens habituels) et qui, cependant, ne peut être prouvée dans les systèmes formels de l'arithmétique (définis par le fait d'inclure l'arithmétique de Peano ou une version apparentée). Des résultat négatifs similaires, fondés sur celui de Gödel, peuvent s'énoncer à propos d'autres théories mathématiques courantes. Nous retiendrons cette conséquence épistémologique de grande portée : la notion « logicienne » la plus stricte d'axiomatisation n'est applicable directement ni aux mathématiques, ni aux autres sciences, pour autant qu'elles recourent aux mathématiques[1].

Malgré cette conclusion décevante, la formalisation de la sémantique n'en revêt pas moins un importance considérable. Tout d'abord, elle a permis de définir la propriété d'adéquation, qui est facile à obtenir et qui suffit pour certaines applications importantes. On établit généralement la cohérence d'un système formel en produisant un modèle de ce système, et, de même, il est courant d'en vérifier l'indépendance sémantiquement plutôt que par des moyens syntaxiques. Ces deux applications reposent sur l'adéquation, et non sur la complétude. En outre, si elle est démontrée, l'incomplétude par rapport à une classe de modèles considérée peut constituer un phénomène intéressant à comprendre en lui-même. Le logicien est ainsi conduit à examiner les relations de similarité ou de dissimilarité des différents modèles. La théorie dont on est parti heuristiquement pour construire le système formel constitue l'un des modèles – ce qu'on peut appeler son *modèle standard*. Une fois que le système formel existe, il est naturel de se demander si tous les modèles qui le valident sont similaires (techniquement parlant, isomorphes) au modèle standard : poser cette question, c'est aborder la question de la complétude sous un autre angle[2]. Loin d'apparaître comme une pathologie, la découverte éventuelle de modèles non standards illustre finalement la fécondité heuristique de l'attitude consistant à formaliser la sémantique. Plutôt que l'obtention de théorèmes d'adéquation et de complétude, *cette attitude générale* recouvre finalement la notion d'axiomatisation la plus représentative que l'on puisse tirer de la logique. Telle est du moins l'une des thèses principales de cet article, thèse dont nous nous emploierons à exploiter les conséquences dans tout ce qui suit.

1. Il ne suffit tout de même pas qu'un système formel inclut celui des nombres entiers pour qu'on ait le droit de le déclarer incomplet : chaque cas d'espèce demande une démonstration. Mais les résultats négatifs existants, nombreux, créent une présomption très forte, qui est suffisante pour faire douter de l'entreprise.

2. Due à Skolem dans les années 1920, la découverte de modèles non standards pour les nombres réels précède l'établissement des grands théorèmes de limitation. Stigum ([1990], p. 459 et suiv.) réexpose la notion en même temps que certaines applications économiques de l'analyse non standard.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

À la lisière de l'économie, certaines recherches inaugurées par Aumann [1976] s'inspirent directement de la logique formelle. Elles portent sur les propriétés *épistémiques* dont la théorie de la décision individuelle et, surtout, la théorie des jeux ont besoin pour se développer. Quelle notion de croyance et de connaissance faut-il attribuer aux agents pour qu'un jeu soit bien défini ? Quel est le rôle de l'hypothèse de « connaissance commune » du jeu ? Peut-on justifier l'équilibre de Nash ou ses raffinements par les croyances, formées séparément, de chaque joueur ? Comment intégrer l'information incomplète d'une manière qui préserve la cohérence de la théorie ? Le traitement analytique de ces questions a souvent pris la forme d'un examen logique, avec une syntaxe et une sémantique formalisées, comme en théorie des modèles[1]. On peut sans doute contester à ces travaux la qualification d'« économiques », et même l'appartenance pleine et entière à la théorie de la décision ou à la théorie des jeux, car ils privilégient les préalables cognitifs de l'action par rapport à l'action elle-même et à ses conséquences. Il se trouve cependant qu'ils émanent de spécialistes de ces théories, et qu'ils circulent désormais parmi les économistes, que peut-être ils influencent déjà. Il n'est donc pas injustifié de les inclure dans ce travail.

L'analyse épistémique constitue un exemple à part : ailleurs en économie, et très généralement dans les sciences empiriques, les idées de système formel et de sémantique formelle se réalisent, au mieux, *analogiquement*. Mais c'est tout de même la manière la plus sûre de vérifier la nature axiomatique ou non d'un travail que d'en examiner les similarités et les dissimilarités avec les axiomatiques du logicien. Nous demanderons tout particulièrement que le travail en question révèle une notion de modèle *sinon formalisée, du moins dégagée à un certain niveau de généralité*. Il faut que le symbolisme des axiomes et des théorèmes puisse renvoyer à d'autres interprétations que la théorie informelle dont on est parti. Peu importe que ces interprétations soient ou non disponibles : il suffira que la virtualité sémantique soit manifeste. En d'autres termes, pour autant qu'on n'en retienne pas une définition trop littérale, *la possibilité de modèles non standards peut servir de critère à la méthode axiomatique*[2]. Ceux qui n'ont pas aperçu le critère ont dilué la méthode dans un usage indistinct des formalisations. Nous cernerons mieux la portée de cette exigence après fait retour sur le cas intermédiaire entre la logique formelle et les sciences empiriques : celui des mathématiques générales ; il y règne un genre d'axiomatisation qu'il faut maintenant décrire.

LES AXIOMATISATIONS DU GENRE ENSEMBLISTE. LE BOURBAKISME

L'axiomatisation des mathématiques (et cela vaut en particulier pour la géométrie des Modernes) se présente rarement selon l'idéal exigeant du logicien, c'est-à-dire comme la mise en relation d'une syntaxe avec une sémantique formalisée. Les axiomatiques disponibles y sont *du genre ensembliste*. Elles obéissent à un schéma relativement simple et uniforme : on se donne un ensemble X, indéterminé ou éventuellement soumis à des conditions peu restric-

1. Voir en particulier Samet [1990], Lismont et Mongin [1994], Aumann [1999], Kaneko [2002].
2. Nous verrons bientôt que Debreu a fort bien compris ce point.

tives, ainsi que certains objets mathématiques définis par rapport à cet ensemble – relations, fonctions, opérations. Ces objets vont être soumis à des conditions particulières qu'on appelle « axiomes ». Dans le cas le plus élémentaire, ils sont de nature directement ensembliste ; dans d'autres cas, on ne peut les décrire sans supposer déjà introduits certains objets mathématiques plus complexes, comme les ensembles mesurables, les topologies, les nombres réels.

L'axiomatisation des groupes peut servir à illustrer le cas élémentaire. Elle consiste, comme on le sait, à fixer un ensemble non vide X, un élément distingué de cet ensemble, 0, et une opération fonctionnelle + vérifiant les trois conditions : pour tous $x, y, z \in X$, $(x+y)+z = x+(y+z)$; pour tout $x \in X$, $x+0 = 0+x = x$; et pour tout $x \in X$, il existe y tel que $x+y = y+x = 0$. On n'a supposé rien d'autre que les notions ensemblistes de base et l'usage des quantificateurs. L'axiomatisation ordinaire de la probabilité, dite de Kolmogoroff, illustre un cas plus complexe. Elle fait intervenir un ensemble X, une classe A de parties de cet ensemble vérifiant des conditions de clôture (une σ-algèbre), et une fonction numérique sur A vérifiant certaines propriétés algébriques (une mesure de probabilité). On suppose connues, cette fois-ci, les notions de nombres réels et d'intégrale. Les mathématiciens voient une différence de complexité mais non pas de nature entre les deux cas, puisqu'ils sont convaincus que toutes les notions mathématiques courantes peuvent s'introduire par des définitions ensemblistes appropriées.

Le traité de Bourbaki représente justement une étape essentielle dans l'élaboration de cette thèse, aujourd'hui banale, de la réduction des mathématiques à la théorie des ensembles. Il l'établit par l'exemple et, simultanément, il en procède, car la conviction préexistait ici aux preuves concrètes. Le bourbakisme n'est pas original, ainsi que l'a reconnu son porte-parole, Dieudonné, dans un article de 1939 qui marque le début du mouvement. Mais il a su tirer parti de la configuration intellectuelle de l'époque, et la publication progressive des *Éléments de mathématiques* a consolidé en retour, chez les mathématiciens et les autres scientifiques, une thèse préalable sans laquelle le projet de traité systématique n'aurait pu voir le jour[1].

Pour Bourbaki, la « méthode axiomatique » consiste, d'une part, à définir des « structures », ce qui est banal, et d'autre part, à les relier systématiquement entre elles, ce qui l'est moins. Une *structure*, dans le langage de l'école, est d'abord un ensemble indéterminé, qui est doté de certaines opérations, fonctions, relations, soumises à des conditions. Adaptée au cas des groupes, cette définition appelle sa généralisation itérative pour les exemples plus complexes. Au-delà des « ensembles dont la nature n'est pas spécifiée » ([1939], p. 40), elle s'étend à ceux qui sont formés à l'aide de structures antérieures (voir « les ensembles que l'on considère jusqu'ici totalement indéterminés dans les structures générales reçoivent une individualité plus caractérisée », [1939], p. 44). Ainsi, les espaces probabilisés, et bien d'autres notions que les *Éléments de mathématiques* prennent ou ne prennent pas en compte, tombent sous la définition bourbakiste des structures.

1. Les mathématiciens des années 1930 s'étaient en outre convaincus que la théorie ZF constituait une formalisation satisfaisante de l'idée d'ensemble, même s'ils avaient renoncé à en démontrer la cohérence. Ce point n'est pas moins important que l'autre pour situer la genèse du bourbakisme.

À ce niveau de généralité, il ne faut pas un grand effort de pensée pour retrouver l'idée de structure en dehors des mathématiques. Généralement parlant, les axiomatisations que révèlent les disciplines empiriques peuvent se réclamer du bourbakisme pour autant qu'elles partent, en effet, de structures – au sens étendu ou itératif que nous venons d'indiquer. Les objets introduits peuvent se trouver à une distance très appréciable de la théorie des ensembles, mais la conception latente n'en est pas moins la même qu'en mathématiques. Les axiomatisations de la physique apparues dans l'après-guerre, comme celle de MacKinsey, Sugar et Suppes [1953], illustrent facilement le schéma. Nous verrons, à la section suivante, comment l'idée de structure se présente en économie[1].

Bourbaki souligne fortement que la « méthode axiomatique » ne consiste pas à définir des structures isolément. Elle a une valeur architectonique, au nom de quoi les bourbakistes déprécient les axiomatisations qu'ils nomment « univalentes », celles qui servent à réorganiser les théories mathématiques isolément les unes des autres. Le reproche de stérilité parfois dirigé contre la méthode vaudrait pleinement – disent-ils en substance – si les mathématiques en étaient restées au stade initial, lorsque, avec Peano et Hilbert, elles ne pouvaient traiter axiomatiquement que deux théories singulières, l'arithmétique et la géométrie euclidienne. L'« architecture des mathématiques », suivant le titre d'un article fondamental de 1962, résultera de la liaison systématique des structures, plus précisément, des *hiérarchies* suivant lesquelles on les agence. Au plus près de la théorie des ensembles, les structures de lois de composition sous-tendent l'algèbre, et les structures de relation d'ordre, la topologie. En axiomatisant des structures mixtes, on peut reconstruire l'algèbre topologique et la topologie algébrique. L'une des deux manières de descendre dans la hiérarchie des structures est, justement, d'entrecroiser les structures élémentaires; l'autre consiste à particulariser une structure considérée isolément, par exemple à passer de la structure de groupe à celle de groupe fini. Si la notion de nombre réel intervient si tardivement dans le traité, c'est qu'elle représente un entrecroisement notablement compliqué de structures. La visée architectonique met durablement à part la conception bourbakiste de l'axiomatique. Si on l'omet, il ne reste plus qu'une didactique magistrale des idées de base, comme celles de système formel ou de pluralité des interprétations.

Il reste – ce que Bourbaki ne fait pas – à situer rigoureusement les axiomatisations du genre ensembliste par rapport à l'idéal du logicien. Et, tout d'abord, quelle est la nature exacte des énoncés qui les composent? Les objets qu'ils servent à introduire sont très proches des modèles des logiciens (d'ailleurs nommés aussi bien « structures »). Dans les deux cas, il s'agit d'ensembles relativement indéterminés sur lesquels on opère des constructions. Le logicien sera donc tenté de faire tomber ces objets du côté de la sémantique. Mais dans l'intention du mathématicien, du physicien, de l'économiste, ces objets tombent

1. Sous l'influence de Suppes [1970], de Sneed [1971] et de Stegmüller [1976], une école entière s'est attachée à identifier et à axiomatiser des « structures » dans les disciplines empiriques, depuis la physique et la biologie jusqu'à l'histoire et l'économie. Ces travaux ne livrent pas d'information scientifique nouvelle et s'ils apportent quelques précisions en matière d'épistémologie concrète, elles paraissent assez minces. Nous laisserons donc de côté cette école « structuraliste » (en un sens peu parisien) aussi bien que ses applications économiques. Pour celles-ci, on peut se reporter aux recueils de Stegmüller, Balzer et Spohn [1982] ou de Balzer et Hamminga [1989].

du côté opposé, celui de la syntaxe. Manifestement, la définition de structures, chez Bourbaki, remplit la fonction des axiomes, et non pas de l'*interprétation* des axiomes. Les signes figurant dans ces définitions sont encore muets ; ils ont certes un sens préalable, fourni par la théorie des ensembles et les théories mathématiques antérieures, mais ils demandent à être *encore* interprétés. Il s'agit donc d'axiomes d'un genre particulier. Un genre de système formel s'enchaîne à eux : c'est l'ensemble des déductions partant de la définition d'une structure[1].

Mais si les structures servent de point de départ au système formel, où faut-il chercher les interprétations ? Il y a une réponse possible : les interprétations apparaîtront progressivement au fur et à mesure qu'on tirera les conséquences. Les exemples qui particularisent les structures, soit par entrecroisement, soit par restriction jouent un rôle *sémantique.* C'est ainsi que l'ensemble des nombres réels, fruit d'un entrecroisement, permet au mathématicien d'interpréter la structure de groupe. Obtenu par restriction de la structure initiale, l'ensemble des permutations sur un ensemble fini permet également de l'interpréter. Mais il y a une autre réponse plus évidente : les interprétations sont destinées à rester informelles ou semi-formelles ; qu'elles soient consignées dans la langue ordinaire ou avec l'aide d'un symbolisme, elles figureront dans les préalables, les commentaires et les conclusions qui accompagnent l'activité mathématisante des sciences. Ainsi, les systèmes formels qui axiomatisent la mécanique classique tirent leur interprétation des systèmes mécaniques concrets ; une telle classe d'objets ne se laisse pas appréhender formellement. Les deux réponses sont correctes en même temps, quoique dans des proportions variables suivant la discipline ou même la théorie considérée. Sommairement parlant, il est caractéristique des mathématiques de tirer leurs interprétations *principalement* d'elles-mêmes, les théories du niveau inférieur servant de modèles sémantiques aux théories du niveau supérieur. Et il est dans la nature des sciences empiriques de faire jouer le rôle *prédominant* en matière d'interprétation à des conceptions théoriques informelles ou semi-formelles.

Nous venons donc de voir que les axiomatisations du genre ensembliste altéraient profondément la distinction entre syntaxe et sémantique. La sémantique y est répartie entre les limbes heuristiques du travail axiomatique et certains développements qui appartiennent à la syntaxe, ce qui heurte à première vue le sens logique[2]. Le mathématicien accomplit en une fois deux actes que le logicien voudrait séparer à la fois conceptuellement et pratiquement : il exploite la richesse déductive du système formel et, *ce faisant*, il en produit des modèles. Altérée, la dualité syntaxe-sémantique ne disparaît pas pour autant. Car la nature linguistique des propositions sémantiques importe moins que ces deux propriétés, dont la quatrième section avait fait sentir le rôle : (A) une notion de modèle apparaît plus ou moins clairement constituée ; (B) la sémantique ainsi comprise et le système formel sont susceptibles d'interagir et de se modifier réciproquement. Les deux propriétés sont étroitement liées, la seconde pouvant

1. « Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés de la structure (en particulier, leur nature propre). » (Bourbaki [1962], p. 41.)

2. Le langage de Bourbaki mêle d'ailleurs comme à plaisir la terminologie de la syntaxe et celle de la sémantique. La citation de la note précédente peut servir d'exemple.

presque servir de critère à la première. Partant de la théorie informelle, on construit un système formel dont elle fournit le premier modèle. Il arrivera que le système admette d'autres modèles dont la théorie informelle, trop restrictive, ne tenait pas compte[1]. Ou bien – à l'opposé, en quelque sorte – il arrivera que le système formel ne rende pas justice à la richesse de la théorie initiale : c'est alors le système formel qui paraît trop restrictif relativement à elle. Ces découvertes doivent conduire à reparcourir l'ensemble du processus. Tel est le *va-et-vient* fécond que certains calculs logiques illustrent paradigmatiquement. Leur valeur de référence persiste, même s'il ne faut pas attendre de l'axiomatisation ensembliste qu'elle en reproduise le fonctionnement technique.

Une idée supplémentaire, fondamentale pour la bonne intelligence de la méthode axiomatique, va de pair avec toutes celles-ci : il n'y a aucune raison d'attendre que l'agencement du système formel – la séquence particulière d'axiomes et de théorèmes en quoi il consiste – reflète le développement naturel du sujet. Ainsi, l'intervention tardive des nombres réels dans le traité de Bourbaki ne correspond pas au rôle constitutif qu'ils jouent dans l'intuition mathématique. De même, l'axiomatisation simultanée, par Bourbaki, du calcul des prédicats et de la théorie des ensembles n'est ni véritablement intuitive, ni conforme au déroulement historique du sujet, ni particulièrement réussie sur le plan didactique : elle n'est finalement « naturelle » en aucun sens du mot. Non sans pathos, Bourbaki souligne l'écart que manifesterait l'axiomatisation par rapport à l'intuition sensible[2]. Pourtant, du point de vue de la méthode axiomatique, il n'y a pas de raison de privilégier cette configuration en quelque sorte défavorable par rapport à la configuration opposée. D'autres axiomatisations des mathématiques réalisent un parallélisme bienheureux entre l'agencement technique et l'intuition opératoire. Il en va sans doute ainsi pour les groupes et d'autres structures algébriques encore. Il en va peut-être ainsi – encore que cela soit contesté – pour les probabilités. Nous verrons que le parallélisme de l'agencement technique et de l'intuition se présente fréquemment dans les théories économiques axiomatisées. Considérée en elle-même, la méthode n'implique rien quant à la fréquence relative des deux configurations. Une telle indétermination s'accorde avec le principe de liberté réciproque de la syntaxe et de la sémantique.

Nous pouvons maintenant conclure l'analyse abstraite de la méthode axiomatique au sens des Modernes. Celle-ci se distingue de la formalisation en général par les propriétés spéciales des systèmes formels que l'on a résumées à la fin de la troisième section. Mais elle s'en distingue en outre par les propriétés (A) et (B) de cette section. Nous n'incluons pas dans la définition ainsi proposée le pouvoir unificateur ou architectonique de la méthode. Cette assertion concerne sa fécondité ou l'opportunité de l'appliquer, et il vaut mieux la dissocier des critères de définition proprement dits. Et nous n'inclurons pas non plus les opinions que l'on a pu émettre sur le parallélisme, ou l'absence de parallélisme, entre les systèmes formels et le réel perçu, car si profondes qu'elles paraissent, ce ne sont justement que des opinions.

1. « An axiom system that has one model usually has many. » (Stigum [1990], p. 38.)
2. Bourbaki est allé jusqu'à écrire que la mathématique axiomatisée et les phénomènes perçus n'entreraient qu'en « contact fortuit » ([1962], p. 46).

LES AXIOMATISATIONS EN ÉCONOMIE

Il en va de l'économie et des théories limitrophes comme de la plupart des sciences : les axiomatisations y sont du genre ensembliste (le cas de l'analyse de la connaissance discuté précédemment demeurant une exception). On s'en convaincra facilement par une recension expéditive de trois grandes classes de développements axiomatiques ou donnés comme tels; certains des exemples seront repris ultérieurement.

1. En théorie de la décision, une axiomatisation consiste le plus souvent à se donner un ensemble non vide X, appelé ensemble des choix possibles (ou « alternatives »), et une relation binaire $\geqslant$ sur X (appelée relation de préférence) qui satisfait différentes conditions. L'axiomatique la plus représentative est celle de l'« utilité de von Neumann-Morgenstern », qui, historiquement parlant, remonte à *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Elle prend pour X l'ensemble des mesures de probabilités définies sur un ensemble mesurable donné, tandis que les conditions imposées à la relation $\geqslant$ s'énoncent habituellement ainsi : préordre, continuité, indépendance. L'axiomatique de Savage [1954] est nettement plus complexe, mais elle se rattache au même schéma. Le critère de décision qui est ainsi axiomatisé s'exprime fonctionnellement comme une somme de valeurs d'utilité pondérées par les valeurs de probabilité : c'est la formule bien connue de *l'utilité espérée* ou *attendue*[1].

La double impulsion de von Neumann et Morgenstern et de Savage explique que se soit constitué, autour de l'utilité espérée et de ses nombreuses variantes, un champ de recherche entier, diversement désigné aujourd'hui comme « théorie de l'utilité », « théorie des choix », « théorie de la décision ». Celle-ci s'est enrichie d'autres critères que celui de l'utilité espérée. Les uns renoncent à l'additivité caractéristique de la formule de l'utilité espérée (et l'on parle à leur propos de « théories non linéaires de l'utilité »); les autres abandonnent les mesures de probabilité au profit de notions différentes ou plus générales (diversement désignées comme capacités, probabilités non additives, fonctions de croyance...). L'axiomatisation de ces différents critères se poursuit presque exclusivement selon le schéma précédent, dont l'importance est ainsi confirmée.

2. En théorie du choix social, on se donne un ensemble non vide X, appelé ensemble des situations sociales; des relations binaires (dites de préférence) ou des fonctions numériques (dites d'utilité) sur X, au nombre de n (« le nombre d'individus »); enfin, une fonction F (dite de choix social) reliant ces n objets à une autre relation sur X (la « préférence collective »). Les axiomes se présentent comme des conditions posées sur F, et en particulier sur son domaine et sur son espace d'arrivée. Arrow a fixé ce schéma dans *Social Choice and Individual Values* en 1951, et il en existe aujourd'hui d'innombrables variantes[2].

1. Dans le cas général, la sommation se comprend au sens de l'intégrale et de la théorie de la mesure. Les mesures de probabilités qui interviennent dans la formule de l'utilité espérée n'ont pas la même origine dans le système de von Neumann et Morgenstern et chez Savage : dans le premier cas, elles sont simplement données; dans le second, elles sont produites par la construction même.

2. Sen [1970, 1986, 1999] en fait la recension aux différentes étapes de la théorie. Pour le cas où les fonctions d'utilité, plutôt que les relations de préférences, servent d'argument à F, voir plus particulièrement d'Aspremont [1985] et Bossert et Weymark [2000].

La théorie de la négociation répond à un schéma très voisin : on se donne une classe X de parties de l'espace R^n satisfaisant certaines propriétés mathématiques (comme la compacité et la convexité), et une fonction F associant à chacune de ces parties (le « problème de négociation ») un point qui leur appartient (« la solution »). Pour chaque « problème de négociation » la partie considérée de R^n est l'« ensemble des valeurs d'utilité réalisables ». Les axiomes apparaissent encore une fois comme des conditions sur F, notamment sur son domaine. On est ici dans le même univers, technique et conceptuel, que celui de la théorie du choix social. La théorie de la négociation remonte à Nash [1950], qui en a fixé la recette pour de nombreux continuateurs[1].

Pour autant qu'on n'y inclue pas celle de la négociation, la théorie des jeux coopératifs obéit à des schémas formels quelque peu différents de ceux-là, mais le plus souvent rangés sous la bannière de la méthode axiomatique. L'un de ses modèles historiques est la dérivation par Shapley [1953] d'un concept de « valeur » pour les jeux coopératifs à utilité transférable. L'économie normative contemporaine comporte d'autres développements encore. Les concepts premiers qui s'y rencontrent ne sont plus – ou plus exclusivement – ceux de préférence ou de l'utilité. En ce sens, les « théories économiques de la justice » les plus récentes divergent nettement de celles du choix social et de la négociation. Mais elles se réclament souvent aussi de la « méthode axiomatique[2] ».

3. En théorie axiomatique de l'équilibre général, toutes les notions sont définies par rapport à $X = R^l$ (l s'appelle ici « le nombre des marchandises »). On se donne une suite X_i, $i = 1, \dots, m$ de parties non vides de R^l (les « ensembles de choix des m consommateurs »); une suite correspondante de relations de préordre (« de préférence ») $\geqslant^i$ définies sur les X_i ; une autre suite Y_j, $j = 1, \dots, n$ de parties non vides de R^l (les « ensembles de production des n producteurs »); un point de R^l (les « ressources initiales »). Ces données définissent une *économie abstraite*. D'autres notions s'enchaînent à partir de celle-ci. Debreu [1959] a fixé ce genre d'analyse axiomatique, et elle a eu une postérité considérable.

Cette liste est sans doute incomplète, mais il est aussi vrai qu'on ne pourrait pas l'étendre beaucoup sans changer de registre. Par exemple, on ne voit pas quelles théories *macroéconomiques* formalisées il faudrait y inclure, sauf à rechuter dans la confusion néfaste de l'axiomatisation avec toute espèce de formalisation. Faut-il y insister, cette remarque ne présente aucune conséquence désobligeante pour la macroéconomie.

La notion de système formel qui se manifeste dans les trois cas obéit plus ou moins rigoureusement aux conditions par lesquelles nous l'avons définie plus haut. La règle *(i)* consistant à délimiter *explicitement et définitivement* les propositions premières est certainement respectée dans toutes les axiomatisations économiques. Elle offre un premier critère simple et tranchant, qui permet de classer bon nombre de travaux économiques : par exemple, la théorie néo-classique du consommateur se présente très différemment chez Debreu ou dans les manuels avancés qui adoptent sa manière, et chez les premiers « économistes

1. Voir notamment les synthèses de Roth [1979], Peters [1992] et de Thomson [1994], qui insistent d'ailleurs sur le caractère « axiomatique » de la démarche.

2. Moulin [1988] et Fleurbaey [1996] présentent les théories visées dans ce paragraphe; ils en affirment également le caractère « axiomatique ».

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

mathématiciens », Pareto, Hicks, Allen, Samuelson, ou, encore aujourd'hui, dans les manuels introductifs qui, à des fins didactiques, reproduisent leur style d'exposition. Quant aux transformations autorisées sur les signes, elles résultent en fait *du choix des ensembles de départ* : les ensembles X apparaissent chaque fois avec les règles mathématiques de la « structure » dont ils sont équipés. Les opérations disponibles dans une axiomatisation à la manière d'Arrow sont toutes les manipulations ensemblistes; dans les autres théories normatives axiomatisées, il s'agira très souvent de toutes les opérations d'espace vectoriel; il en va de même en théorie de la décision, encore que celle-ci puisse éventuellement s'en tenir aux opérations d'espace convexe[1]. C'est ainsi que la condition *(ii)* apparaît remplie. Quant à la condition *(iii)*, elle se manifeste au moins par le petit nombre de propositions premières : trois dans les axiomatisations courantes de l'utilité de von Neumann et Morgenstern, cinq dans l'une des présentations classiques du théorème d'Arrow, huit chez Savage. Ces axiomes doivent être indépendants les uns des autres, sans quoi le décompte n'aurait pas de signification du tout. Même en requérant l'indépendance, il existe bien des variantes possibles, de sorte que le nombre d'axiomes n'est pas un indicateur très parlant. Il faut reconnaître que l'« effectivité » ne se manifeste guère, dans les axiomatisations économiques, que par un principe de modération très vague : les axiomes doivent le moins nombreux possible sans nuire à la facilité d'interprétation.

Les économistes des trois groupes ont rappelé – Debreu et son école avec une grande vigueur[2] – que l'axiomatisation permettait de séparer complètement l'inférence logique et les interprétations, et donc de contrôler celle-là plus étroitement que ne le permettent les autres procédés de formalisation. De fait, les trois groupes de théories vérifient facilement l'idée générale suivant laquelle un système formel existe et se développe indépendamment de ses interprétations. Plus exactement, ils la vérifient à la manière caractéristique des axiomatisations ensemblistes, c'est-à-dire en répercutant les interprétations des théories préalables. Non seulement le sens des opérations mathématiques fixées par la « structure » est supposé connu, mais il arrive que celui des termes soit déterminé par certaines théories « économiques » antérieures. Ainsi, on peut formuler l'axiomatique de la négociation de Nash en faisant référence à l'utilité espérée au lieu de prendre la convexité du « problème de décision » comme une donnée première. Cette possibilité supplémentaire ne crée pas de difficultés : les emprunts d'une axiomatique à l'autre se font linéairement, les théories de la décision individuelle servant d'input aux théories des choix collectifs, et non l'inverse.

Rien de ce qui a été dit jusqu'à présent ne permettrait de déceler une singularité quelconque des axiomatisations économiques par rapport au genre ensembliste pris en général. On retrouve d'ailleurs le rapport en quelque sorte impur de la sémantique et de la syntaxe qui va de pair avec ce genre : en théorie de la décision et en théorie du choix social, pour ne citer qu'elles, l'interprétation apparaît *de deux façons*. D'une part, le système formel lui-même permet

1. On peut, si on le souhaite, axiomatiser une structure d'espace convexe ou des structures apparentées indépendamment d'un espace vectoriel sous-jacent. L'idée remonte en fait à von Neumann et Morgenstern. Voir Mongin [2001b].

2. Les textes introductifs de Debreu [1984, 1986] sont éloquents à cet égard; également, l'introduction de Hildenbrand à Debreu [1983].

d'obtenir des conséquences mathématiques plus concrètes, plus faciles à comprendre que n'étaient les axiomes : typiquement, les propriétés des fonctions d'utilité qui, suivant l'expression consacrée, « représentent » les relations de préférences. D'autre part, les interprétations figurent aussi dans les développements informels qui précèdent ou qui concluent le développement logique du système formel, et servent à le « motiver », suivant une autre expression familière. S'il y a une spécificité sémantique des axiomatisations économiques, elle tient au fait que les interprétations figurant dans les préalables informels sont souvent *très informelles* et, en outre, particulièrement *tenaces*. Les notions latentes de modèle restent floues; les va-et-vient entre sémantique et syntaxe que la méthode axiomatique laisse attendre ne se produisent pas si couramment. *La réalisation des conditions (A) et (B) ne va pas sans difficulté en économie.*

Mais on ne peut pas traiter de manière uniforme l'ensemble des axiomatisations économiques. Les unes jouent pour la théorie économique un rôle qu'on peut dire *définitionnel* : elles servent uniquement à fixer un cadre d'analyse formelle qui est simple et univoque, en coupant court aux difficultés qu'apportent les interprétations. Les axiomes résument une définition avec laquelle on pourra travailler mathématiquement. En eux-mêmes, ils ne contribuent pas activement aux résultats; ceux-ci dépendront de conditions supplémentaires. C'est ainsi que fonctionne la notion d'« économie abstraite » chez Debreu : elle n'est qu'une définition à utiliser, presque vide en elle-même. Pour prouver le résultat principal de *Theory of Value* (1959), Debreu introduit des hypothèses qui s'ajoutent aux axiomes d'une « économie abstraite » : celle de convexité des préférences, des ensembles de production, etc. En dissociant la notion axiomatique et les conditions facultatives, on se donne un avantage : la notion peut circuler, on peut la reprendre indéfiniment. Dans le meilleur des cas, elle facilitera l'établissement d'une famille entière de résultats, elle finira par unifier un domaine. C'est le rôle que Debreu voulait faire jouer à la notion d'« économie abstraite », et qu'il a effectivement joué dans la théorie axiomatique de l'équilibre général[1].

D'autres axiomatisations obéissent à l'objectif tout différent de formaliser définitivement un raisonnement particulier; nous les appellerons *théorématiques* pour les opposer aux précédentes. Elles servent à préparer directement un résultat mathématique. On se donne alors, dans le même mouvement, une définition et certaines hypothèses : les axiomes sont hautement informatifs. L'axiomatisation de la « fonction de bien-être social » dans la théorie arrovienne du choix social répond à ce modèle : elle rassemble les hypothèses du célèbre théorème d'impossibilité. L'axiomatisation de la fonction correspondante chez Nash débouche sur une caractérisation (par conditions nécessaires et suffisantes) d'un certaine fonction de décision collective, le « produit de Nash ». Dans les deux cas, le résultat est frappant; il est aussi vrai que l'efficacité des axiomes s'épuise avec lui. Ils ne jouent pas, en tant que tels, de rôle unificateur. Certes, ils peuvent réapparaître dans le développement ultérieur de la théorie, mais à condition seulement d'être combinés autrement, voire complètement reformulés. En l'occurrence, la postérité d'Arrow et de Nash s'explique par la découverte de certaines *variantes*, et non pas d'une réutilisation à l'identique des axiomes de

1. Nous ne reprendrons pas systématiquement l'exemple de Debreu dans la suite de ce texte. Parmi différents commentaires qu'il a suscités, le lecteur peut se reporter notamment à Schmidt [1985], Ingrao et Israel [1990, p. 299 et suiv.] et Vilks [1992].

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

départ. Il a fallu modifier la notion même de fonction de choix social pour introduire les comparaisons d'utilité, et la théorie de la négociation a progressé en revenant sur la condition d'« indépendance des options non pertinentes ».

La distinction entre deux familles d'axiomatisations, définitionnelles et théorématiques, demande sans doute à être nuancée : les axiomatiques de la décision, objet de cette section, s'apparentent à la conception théorématique, mais l'évolution du domaine leur a fait jouer progressivement *un rôle définitionnel aussi.* La dynamique des théories tend donc à brouiller la différence des deux familles. Mais elle n'en existe pas moins dans le principe, ce que les cas polaires de Debreu et d'Arrow ou Nash montrent bien.

Si, comme Bourbaki, on attache un rôle architectonique aux axiomatisations, on voit aussitôt que celui-ci peut être efficacement rempli par la première famille d'axiomatisation, mais que la seconde ne s'y prête pas bien. Elle s'expose alors à la forte critique de l'auteur des *Éléments de mathématiques* :

> « Les premières axiomatisations... portaient sur des théories univalentes, c'est-à-dire telles que le système global de leurs axiomes les déterminaient entièrement, et n'étaient par suite susceptibles de s'appliquer à aucune théorie autre que celle d'où on l'avait extrait (au rebours de ce que nous avons vu pour la théorie des groupes par exemple); s'il en avait été ainsi pour toutes les structures, *le reproche de stérilité adressé à la méthode axiomatique aurait été pleinement justifié.* » (Bourbaki [1962], p. 46; c'est nous qui soulignons.)

Ce rapprochement permettra de régler une question parfois débattue en méthodologie économique : le « bourbakisme » a-t-il pénétré l'économie mathématique contemporaine ? Si l'on entend par cette expression le recours aux axiomatisations ensemblistes, sans plus de précision, alors toutes les axiomatiques courantes en économie sont « bourbakistes ». Mais c'est là presque ne rien dire, puisque, on l'a souligné, l'orientation ensembliste de l'axiomatisation, chez Bourbaki, n'a rien d'original. Si, en revanche, on insiste sur la valeur organisatrice de l'axiomatisation, alors le « bourbakisme » des économistes est un phénomène beaucoup plus rare. On s'accorde à retrouver une influence de l'école mathématique chez le Debreu de *Théorie de la valeur*, ce qui est correct. Encore faut-il donner les bonnes raisons; elles ont trait au pouvoir unifiant des « structures » qu'il introduit, et non pas au fait brut que cette notion se retrouve dans son œuvre[1].

VON NEUMANN ET MORGENSTERN. L'AXIOMATISATION DE L'UTILITÉ ESPÉRÉE

C'est à von Neumann et Morgenstern [1944] que nous faisons remonter les premières axiomatisations en économie ou dans les théories limitrophes. La formation intellectuelle des deux auteurs sur les lieux et à l'époque mêmes où le positivisme logique a pris son essor, les contacts occasionnels qu'ils eurent dans les années 1920 avec le *Wiener Kreis* et le *Mathematische Kolloquium*, enfin et

1. On comparera cette discussion du bourbakisme en économie avec celles d'Israel [1981], Ingrao et Israel [1987], Weintraub et Mirowski [1994] et Vilks [1995]. Certains commentaires minorent l'importance de la composante architectonique.

surtout, les travaux personnels de von Neumann – tous ces facteurs mettaient les fondateurs de la théorie des jeux de plain-pied avec l'axiomatique des Modernes. Von Neumann joue ici le rôle décisif, et il serait passionnant de suivre l'itinéraire qui l'a conduit de la théorie des ensembles et de la mécanique quantique à la théorie des jeux et de l'utilité[1]. Dans les trois cas, l'activité formalisante de von Neumann a pris une tournure axiomatique; mais dans chaque cas, elle se présente différemment. La définition que von Neumann donne des nombres entiers appartient à la théorie axiomatique des ensembles; elle répond aux canons les plus élevés de l'axiomatisation. Celle qu'il propose de la mécanique quantique illustre le genre ensembliste et – avant l'heure si l'on veut – la notion bourbakiste de structure. Dans *Theory of Games and Economic Behavior*, il pratique le même genre ensembliste d'axiomatisation, quoique, nous allons le voir, en lui donnant alors une forte spécificité. Cette séquence révèle une cassure entre le premier travail d'axiomatisation et les deux suivants : d'abord soumis à l'influence de Hilbert, von Neumann abandonne l'idéal « formaliste » d'axiomatisation dès qu'il apprend le résultat négatif de Gödel[2]. On est stupéfait de la rapidité avec laquelle il en a deviné les conséquences épistémologiques, au-delà de l'énoncé technique du théorème. Il n'est pas moins remarquable que von Neumann soit resté fidèle à l'axiomatique malgré cette immense déception intellectuelle. Sans doute va-t-il désormais la considérer tout autrement qu'avant. Le genre ensembliste d'axiomatisation constitue une position de repli par rapport à la conception « formaliste » des mathématiques : c'est bien ainsi que von Neumann le comprend. La façon dont il le pratique en économie mathématique est assez personnelle. Il lie alors l'approche axiomatique avec la combinatoire et l'analyse convexe, ce qui n'allait pas de soi; son propre travail en mécanique quantique faisait en effet intervenir des structures plus riches (les espaces de Hilbert). Dans le même temps qu'il introduit la « méthode axiomatique » en économie, von Neumann entend la libérer de sa dépendance quasi exclusive à l'égard du calcul différentiel. *Theory of Games and Economic Behavior* doit être lu non seulement comme un plaidoyer en faveur de celle-là, mais comme une défense et illustration des mathématiques les plus appropriées à l'économie, qui sont, en l'occurrence, des mathématiques simples. À l'usage de l'historien des mathématiques, on signalera ce paradoxe mineur : l'axiomatique de von Neumann, en économie et plus généralement dans sa phase post-hilbertienne, fait bon ménage avec les résultats non constructifs (comme le théorème de Hahn-Banach, fondement de l'analyse convexe).

S'agissant de la « méthode axiomatique », on pourrait contester l'antériorité de von Neumann et Morgenstern et alléguer le Samuelson de la théorie des préférences révélées[3]. Mais ni en 1938, ni dans ses écrits ultérieurs, Samuelson ne présentait sa théorie à la manière d'un système formel. Certes, l'article constitutif de la théorie, « A Note on the Pure Theory of Consumer Behavior » (1938), isole

1. On trouvera des indications précieuses, quoique succinctes, dans la biographie qu'Israel et Gasca [1995] ont consacrée à von Neumann.

2. Voir Israel et Gasca ([1995], p. 42). L'expression « formaliste » désigne ici la conception défendue par Hilbert et son école dans les années 1920. Il s'agissait idéalement d'enchaîner les systèmes formels les uns aux autres de façon que chaque système établît la cohérence du précédent. Hilbert espérait démontrer ainsi la cohérence des mathématiques.

3. Les auteurs qui présentent Samuelson comme un représentant de l'axiomatique ne la séparent pas rigoureusement de la formalisation. Cela vaut même pour Granger ([1955], p. 195).

des « postulats » et en tire rigoureusement certaines conséquences mathématiques. Mais chez Samuelson, l'interprétation accompagne le raisonnement tout au long; elle ne disparaît qu'à l'occasion de courtes séquences déductives (en fait, des manipulations différentielles) qui manifestent seulement la présence d'une *formalisation.* L'exposé de 1938 – par ailleurs remarquable – est de facture traditionnelle. Non seulement il ne sépare pas la syntaxe et la sémantique, mais encore l'enchaînement déductif s'y accompagne d'une *argumentation.* Samuelson veut établir que ses « postulats » de comportement lui permettent de retrouver la théorie néo-classique de la demande, ou du moins les propositions principales de celle-ci. Les sauts déductifs alternent avec des commentaires qui vont au-delà même de l'interprétation : ils anticipent la conclusion générale, préviennent des objections, indiquent d'autres points de vue, brossent l'historique du sujet. C'est ainsi qu'on écrivait chez les économistes avant l'irruption de la « méthode axiomatique », et c'est encore ainsi qu'ils écrivent dans les nombreux secteurs de la discipline où elle n'a pas pénétré[1].

Von Neumann et Morgenstern se réclament expressément de la « méthode axiomatique » en deux passages au moins de leur ouvrage. Le premier est consacré à la théorie de l'utilité espérée (section 3.5); un Appendice réexamine la question en détail dans l'édition de 1947. Le second porte sur la notion générale de jeu (section 10); les auteurs le concluent en écrivant fièrement « qu'un groupe de phénomènes de nature principalement psychologique vient d'être axiomatisé[2] ». Le premier des deux passages est à l'origine de la théorie de la décision, le second – auquel les deux auteurs prêtaient plus d'importance – a donné naissance à la théorie des jeux non coopératifs. De l'avis ordinaire aujourd'hui, celle-ci n'est pas exactement une théorie axiomatisée. Il y a donc une disparité perceptible dans la postérité méthodologique de ces deux passages clés. La définition formelle des jeux chez von Neumann et Morgenstern pourrait servir à illustrer l'idée d'une axiomatisation *définitionnelle.* Les destins contrastés des deux « axiomatiques » témoignent du fait que les économistes privilégient le genre *théorématique*, quelquefois même au point d'ignorer qu'il existe un autre genre d'axiomatisation[3]. Au stade ultérieur du livre où von Neumann et Morgenstern abordent les jeux coopératifs, ils semblent avoir renoncé à revendiquer pour leur analyse l'idée et le langage de la méthode axiomatique (section 25, p. 238). S'agissant de la fonction caractéristique d'un jeu à n joueurs, ils parlent seulement de « définitions » ou de « propriétés », non pas d'axiomes, et ce qu'ils établissent à son sujet n'est pas offert comme une axiomatisation, mais comme une « caractérisation mathématique » (*ibid.*, p. 245). La remarque est d'autant plus curieuse à faire que, avec la théorie de la décision, l'analyse des jeux coopératifs représente aujourd'hui un terrain privilégié pour l'axiomatisation telle que les économistes la conçoivent.

---

1. Cette brève analyse concerne Samuelson lui-même, mais non la théorie des préférences révélées en général. Depuis Uzawa [1960], celle-ci affecte clairement l'aspect d'un système formel.

2. « There are of course many – and most important – aspects of psychology which we have never touched upon, but the fact remains that a primarily psychological group of phenomena has been axiomatized. » (P. 77.)

3. Il n'est pas facile de dire si von Neumann et Morgenstern ont aperçu la distinction entre les deux genres; en tout cas, ils n'en tirent aucune conséquence. Les considérations abstraites que l'ouvrage consacre à la « méthode axiomatique » (ou « logistique ») sont réparties entre les deux passages-clés, sans rupture de continuité.

Le « traitement axiomatique de l'utilité numérique » chez von Neumann et Morgenstern (dans la section 3.5 de *Theory of Games*, et l'appendice de l'édition de 1947) est le plus développé que contienne leur ouvrage, et c'est à lui que nous nous limiterons maintenant. Il fournit l'occasion d'un développement dans lequel von Neumann et Morgenstern exposent les points fondamentaux de leur méthode :

> « A choice of axioms is not a purely objective task. It is usually expected to achieve some definite aim - some specific theorem or theorems are to be derivable from the axioms - and to this extent the problem is exact and objective. But beyond this there are always other important desiderata of a less exact nature : The axioms should not be too numerous, their system is to be as simple and as transparent as possible, and each axiom should have an intuitive meaning by which its appropriateness may be judged directly. In a situation like ours this last requirement is particularly vital, in spite of its vagueness : we want to make an intuitive concept amenable to mathematical treatment and to see as clearly as possible what hypotheses this requires. » ([1944-1947], p. 25.)

Le début de ce passage n'insiste pas tant sur la méthode axiomatique en général que sur une idée propre aux deux auteurs, qui est de la faire servir à la démonstration de théorèmes particuliers : von Neumann et Morgenstern sont les premiers à codifier le style théorématique de l'axiomatisation. La suite du texte contient une idée distincte de celle-ci, également destinée à faire florès : les axiomes doivent être directement interprétables, et peut-être même – cela devient clair, en tout cas, par l'exemple de l'utilité – plus facilement interprétables que la conclusion qu'ils permettent d'obtenir. Ce que les auteurs disent de la « signification intuitive » et du « caractère approprié » des axiomes doit être rapproché d'autres prises de position caractéristiques[1].

Les continuateurs, notamment Luce et Raiffa ([1957], p. 25), insisteront bientôt sur le contraste entre deux types d'interprétations pour les axiomes, les « normatives » et les « positives », alors que von Neumann et Morgenstern semblaient envisager les premières avant tout. Cette distinction importe, mais nous voulons surtout mettre en évidence le fait que les axiomes de l'utilité espérée soient directement interprétables. Il n'est pas question pour autant de conclure que la théorie ramènerait l'axiomatisation à la manière des Anciens. Von Neumann et Morgenstern percevaient très clairement ce qui sépare la correction des inférences et la vérité des énoncés. Les deux auteurs maîtrisent la notion, exclusivement moderne, de système formel. À un point du livre, d'ailleurs, ils en détaillent didactiquement les propriétés souhaitables, cohérence, indépendance et complétude ([1944-1947], p. 76). Nous l'avons déjà indiqué à propos de Bourbaki : la méthode axiomatique ne dit pas *en quel point* les interprétations se raccorderont le plus naturellement aux signes. Tel système formel n'accueillera l'interprétation qu'en aval, c'est-à-dire au niveau, seulement, des théorèmes; tel autre l'accueille à la fois en amont et en aval. Les deux auteurs désignaient le dernier cas comme paradigmatique pour l'économiste. La conception moderne est certainement compatible avec cette possibilité.

En résumé, selon le canon fixé par von Neumann et Morgenstern, l'axiomatisation d'une théorie économique consistera dans l'élaboration d'un système

1. Ailleurs, ils réclament que les résultats de la théorie de l'utilité « puissent être comparés avec l'expérience ou tout au moins le bon sens » (1947, p. 9). Leur concept d'interprétation n'est jamais très exigeant.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

formel relatif à une théorie particulière, et qui, outre les fonctions techniques ordinaires, met en relief dans les axiomes les propriétés sémantiques les plus importantes pour cette théorie.

L'axiome le plus remarquable de la théorie de l'utilité espérée porte sur la propriété dite aujourd'hui d'« indépendance von Neumann-Morgenstern ». Mathématiquement, l'axiome est responsable de la forme « linéaire » (il vaut mieux dire « affine ») de la fonction qui représente la préférence, ainsi que de l'unicité relative – à une transformation « linéaire » près – de cette représentation. Sans l'indépendance de von Neumann-Morgenstern, les axiomes de préordre et de continuité déterminent seulement l'existence de représentations continues, uniques à une transformation croissante près[1]. Pour interpréter l'axiome, on le paraphrase d'ordinaire ainsi : lorsque, de deux « loteries » x et y, x est faiblement préféré à y, alors la « loterie » composée de x et d'une loterie tierce z dans la proportion α est faiblement préférée à la « loterie » composée de y et de z, dans la même proportion α; une telle propriété vaut pour tout choix de α (entre 0 et 1) et de z. Par une bizarrerie qui a fait couler de l'encre, la condition d'indépendance ne figure pas chez les deux fondateurs, alors même qu'elle constitue tout l'intérêt de leur théorie ! Les manuels d'aujourd'hui ne reprennent donc pas l'axiomatique initiale de von Neumann et Morgenstern, mais – en la perfectionnant – l'une de celles, plus tardives, qui explicitèrent la propriété manquante, chez Marschak [1950], Herstein et Milnor [1953] ou bien Luce et Raiffa [1957]. Pour la discussion épistémologique, nous pouvons faire abstraction de ce point d'histoire, assurément surprenant[2].

La théorie de l'utilité espérée satisfait-elle à l'idée d'axiomatisation défendue dans cet article? Elle réalise une idée techniquement satisfaisante de système formel, et les propriétés de cohérence et d'indépendance y font l'objet de vérifications faciles. Mais qu'en est-il de la sémantique? Comme nous l'avons déjà indiqué, celle-ci figure dans la théorie de deux manières dissemblables. Tout d'abord, certaines idées informelles permettent d'interpréter les symboles. Ainsi, les variables x, y, z du paragraphe précédent renvoient à la notion économique de « loterie », qui, dans la théorie contemporaine, recouvre non seulement les billets de loterie ou d'autres objets similaires, mais encore les polices d'assurance, certains titres financiers, les actifs monétaires en situation d'inflation, etc. Il s'agit, en bref, de tous les risques économiques auxquels conviendrait l'hypothèse que les probabilités de gains et de pertes sont à la fois extérieurement déterminées et connaissables par l'agent[3]. Le concept économique de « loterie » avait au départ une extension moindre. Von Neumann et Morgenstern visaient primordialement l'application de leur théorie de l'utilité à celle des jeux à somme nulle, et le premier modèle intuitif de leur axiomatisation semble en avoir été celui-ci : un joueur veut se rendre impénétrable à son adversaire; il décide de rendre aléatoires ses propres choix de stratégie et, pour cela, utilise une roulette ou tout autre procédé matériel des jeux de hasard. Mais, justement, le point de vue rétrospectif

1. Ceci résulte d'un théorème bien connu de Debreu [1959].

2. En voici l'explication, signalée pour la première fois par Malinvaud : l'objet primitif de l'axiomatique de 1947 n'était pas la « loterie » elle-même, mais *la classe d'équivalence* des « loteries » telle qu'elle est déterminée par la relation de préférence. Voir l'historique de Fishburn et Wakker [1995].

3. Les économistes désignent ces hypothèses par l'expression trompeuse de « probabilités objectives ».

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

est pertinent pour le diagnostic que nous recherchons. Il livre une indication du fait – éminemment positif – que le système formel de von Neumann et Morgenstern autorise des *transpositions sémantiques* au-delà de la toute première interprétation qu'ils recherchaient.

La notion de modèle fournie par les « loteries » est donc assez nettement dégagée pour s'appliquer à des objets divers. Mieux que cela, un *va-et-vient* entre les interprétations intuitives et les systèmes s'est manifesté ici et là dans la théorie. On s'est par exemple demandé si la notion intuitive de « loterie composée » était suffisamment reconnaissable dans le système initial et, comme la réponse a été négative, des variantes axiomatiques se sont fait jour afin d'en rendre mieux compte. Celle que proposent Luce et Raiffa ([1957], p. 23 et suiv.), souvent reprise par la suite, ne fait pas correspondre les « loteries » à des mesures de probabilité. Les auteurs partent d'un ensemble C (de « résultats finaux ») et formalisent les « loteries » simples en associant des nombres non négatifs et de somme 1 aux éléments de C ; ils permettent ensuite d'associer des nombres du même genre aux objets précédents, ce qui rend l'idée de « loterie composée ». Dans ce langage plus expressif, ils peuvent énoncer un axiome de « réduction des loteries composées » aux loteries simples, qui n'avait pas sa place dans le système initial et dont l'effet peut s'énoncer ainsi : on multipliera les nombres entre eux comme si on avait affaire à des probabilités composées. Tout ce développement est très facile et prévisible, puisqu'il revient à détailler un fait élémentaire du calcul des probabilités au lieu de se le donner d'emblée. Mais le langage volontairement naïf de Luce et Raiffa aura permis d'expliciter un axiome supplémentaire, ce qui, rétrospectivement, a facilité la critique sémantique et même certains développements positifs de la théorie.

Sous un autre angle, la sémantique se manifeste, au sein du formalisme même, par le résultat d'existence et d'unicité du « théorème de représentation[1] ». Celui-ci met des objets ensemblistes relativement concrets (la fonction d'utilité « linéaire ») en regard des conditions relativement abstraites dont il part. Pour employer une terminologie philosophiquement plus précise, les mêmes objets sont décrits « intensionnellement » dans les axiomes servant d'hypothèses au théorème, et « extensionnellement » dans sa conclusion. Celle-ci entre alors avec ceux-là dans le rapport *analogique* d'une sémantique à une syntaxe. (On pourrait presque voir une indication supplémentaire de ce fait dans l'expression même de « théorème de représentation », pour autant que l'on passe sur la différence entre signification et représentation.) En outre, la conclusion du théorème joue le rôle utilitaire dévolu à la sémantique : c'est elle qui permet de s'assurer que le système d'axiomes est non contradictoire (puisqu'il est vérifié par l'utilité « linéaire » dont on peut supposer que la notion est non contradictoire), et c'est elle aussi qui permet de vérifier l'indépendance logique du troisième axiome (puisque toute utilité n'est pas « linéaire »)[2].

Au sens quasi syntaxique des « théorèmes de représentation », la notion implicite de modèle sémantique dépend de la conclusion retenue; mais dès lors

1. Cette considération est de nouveau rétrospective : von Neumann et Morgenstern situaient les interprétations dans l'informel exclusivement Le système formel particulier qu'ils développent en 1947 a pu influencer ici leur point de vue.

2. Des résultats de Fishburn [1982] sur les préordres lexicographiques permettent de vérifier l'indépendance de l'axiome de continuité. Quant à eux, Von Neumann et Morgenstern ([1944-1947], p. 27) tenaient l'indépendance de leur système pour évidente.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

que la théorie de l'utilité espérée a multiplié les variantes, il n'y a plus à discuter la réalité d'un va-et-vient entre syntaxe et sémantique. Des deux manières qu'on la conçoive finalement, la sémantique de l'utilité espérée vérifie approximativement les conditions (A) et (B) de la section 5.

Ce diagnostic favorable a demandé le recul du temps : l'axiomatisation initiale n'était qu'une promesse. L'observation relativisante, sur laquelle il faut insister, vaut encore pour l'appartenance de l'axiomatique à la famille théorématique : avec l'évolution de la théorie économique générale, elle en est venue à jouer dans certains contextes un rôle *principalement linguistique.* Lorsque les économistes d'aujourd'hui invoquent l'« hypothèse von Neumann-Morgenstern » sans donner d'explication, presque machinalement, ils ne font de leur point de vue qu'introduire une définition. Ainsi, le cours de la science peut brouiller l'opposition simple entre deux familles d'axiomatisation, la théorématique et la définitionnelle. Mais celle-ci garde une signification de principe, et l'étude des concepts pris à leurs sources, surtout quand elles sont aussi parlantes que *Theory of Games and Economic Behavior*, en confirme la pertinence.

ARROW, NASH ET L'AXIOMATISATION DES THÉORIES NORMATIVES

À côté de von Neumann et Morgenstern, il semblerait qu'on doive faire figurer Arrow [1951] parmi les premiers maîtres de l'axiomatisation en économie. Cette attribution paraît d'autant plus naturelle que, historiquement, Arrow est le premier économiste à symboliser la préférence individuelle par des relations binaires; au moment où il écrivait son livre, il ne pouvait appréhender la théorie des relations qu'en remontant simultanément aux sources logiciennes de l'axiomatique[1]. Pourtant, *Social Choice and Individual Values* ne fait guère état de la méthode, et les fameux « axiomes d'Arrow », suivant une expression devenue banale par la suite, s'intitulent pour partie « conditions ». Ce choix terminologique n'est sans doute pas indifférent. Le souci de justifier les « conditions » différemment suivant le contexte économique, éthique ou politologique; la volonté de toucher un public à la fois divers et peu rompu aux mathématiques; le soin mis à résoudre des questions préexistantes, comme celle des « principes de compensation » en économie du bien-être; toutes ces considérations, et d'autres encore, ont dû jouer leur rôle. Le style de cet ouvrage extraordinairement novateur demeure traditionnel par son alternance caractéristique d'inférences logico-mathématiques et de commentaires conceptuels, de références historiques, d'aperçus généralisants, de polémiques ébauchées. L'écriture d'Arrow, en 1951, est somme toute plus proche de celle du Samuelson de 1938 que du style axiomatique dont von Neumann et Morgenstern venaient de faire la propagande en 1944[2].

Voici l'une des rares allusions qui soit faite à la méthode axiomatique dans l'ouvrage d'Arrow : « One of the great advantages of the abstract postulational methods is the fact that the system may be given several different interpretations, permitting a considerable saving of time. » ([1951-1963], p. 87.)

1. Il emprunte la théorie des relations à Tarski [1941].
2. Nous avons insisté ailleurs (Mongin [1999]) sur la construction argumentative, plutôt que strictement axiomatique, de *Social Choice and Individual Values*.

À juste titre, Sen [1999] a isolé cette phrase pour la rapporter à la manière – pour le coup *explicitement* axiomatisante – des théories ultérieures du choix social. Il faut lire l'ensemble du passage pour se convaincre qu'Arrow ne voyait pas uniquement des avantages aux « méthodes postulationnelles abstraites » : le théorème d'impossibilité, dit-il en substance, s'applique dans toutes les interprétations concevables de ce qu'on appelle « état de la société » (*social state*). On peut rapporter cette variable aux « décisions de la société » (*social decisions*) aussi bien qu'aux « fins de la société » (*social ends*). Mais la condition de domaine universel ne s'applique pas à la seconde interprétation, alors même qu'elle est défendable pour la première. Si, comme on peut le penser, les « fins de la société » résultent de l'histoire, voire de l'évolution biologique, il faut conclure que celles-ci élimineront certaines combinaisons non viables des préférences individuelles, de sorte que la condition de domaine universel devient problématique. En revanche, s'il s'agit de sélectionner une « décision de la société », on peut admettre qu'il faille prendre en compte l'ensemble des combinaisons de préférences *a priori* concevables, et la condition de domaine universel apparaît plus facile à défendre.

Arrow n'approfondit pas cette discussion, mais il semble avoir eu la prescience d'un mauvais destin possible de la théorie du choix social. La difficulté qu'elle rencontre est de donner un sens aux axiomes *pris ensemble et non pas seulement un à un*. La condition de domaine universel peut s'accommoder d'une interprétation par les décisions effectives plutôt que par les fins. Fort bien. Mais qu'en est-il alors, par exemple, de la condition d'unanimité (ou de « souveraineté du consommateur ») ? Garde-t-elle sa valeur contraignante lorsqu'on ne parle plus des fins? Et qu'en est-il des autres conditions? Le mauvais destin de la théorie serait de démontrer des théorèmes privés d'interprétation alors même que les hypothèses dont ils partent ont, séparément, une ou plusieurs interprétations raisonnables. La minorité d'auteurs qui, aujourd'hui, nient l'intérêt conceptuel du théorème d'impossibilité de 1951 semble avoir en vue cette configuration sémantique déplaisante. Il est instructif qu'Arrow ait entrevu une faille possible de la théorie du choix social dans le passage même où il envisage la méthode qu'elle suivra bientôt sans réticence. La faille est en rapport avec la méthode : la séparation des signes et des interprétations, telle que l'accomplissent les systèmes formels, permet certes de progresser, mais on ne sait pas nécessairement vers quel but[1].

Nous avons mentionné d'autres développements de la théorie normative axiomatisante : la théorie de la négociation à la manière de Nash [1950] et la théorie des jeux coopératifs, non pas tant à la manière de von Neumann et Morgenstern que de Shapley [1953]. Dans les deux domaines, il s'est développé un style d'analyse dont le principe est à peu près celui-ci. On commence par formuler à un haut niveau d'abstraction les conditions (dénommées « axiomes ») que devraient satisfaire les règles d'évaluation collective; on examine ensuite les conséquences des conditions prises ensemble et, autant que possible, on décrit l'ensemble des règles qui les vérifient exactement. Si cet ensemble est vide, on a démontré une impossibilité, ce qui est un résultat informatif puisque, par hypothèse, les conditions de départ décrivaient des propriétés souhaitables. Si

1. Cette difficulté essentielle n'a pas échappé non plus, il s'en faut, à Sen, alors même qu'il a vigoureusement contribué à orienter la théorie du choix social vers l'axiomatique.

l'ensemble n'est pas vide, on a caractérisé une classe de règles (qu'on appelle « solution »)[1].

La déduction peut servir aussi bien à retrouver des règles existantes ou naturelles qu'à introduire des règles originales ; les conditions peuvent être à leur tour soit familières, soit inédites. Les articles de Nash et de Shapley, qui servent ici de modèles, obtenaient des règles inédites – le « produit de Nash » et la « valeur », respectivement – à partir de conditions qui l'étaient en partie ; mais ce n'est là qu'un cas possible ; ailleurs, la théorie dérive des formules connues, comme la somme ou l'égalité des niveaux d'utilité. On s'attend normalement que la classe caractérisée présente une certaine unité mathématique. Idéalement, elle constitue un singleton, mais on s'accommodera des embranchements et, surtout, des alternatives : les règles sont ou bien d'un genre, ou bien d'un autre. Passé la première étape déductive, différents développements peuvent s'envisager : la transformation des impossibilités en caractérisations ou vice versa ; la transformation d'une caractérisation en une autre ; l'exportation des résultats déjà obtenus dans une théorie formelle voisine, comme on a pu transcrire ceux la négociation dans le langage du choix social.

À ce niveau de généralité, la méthode s'applique aussi bien à la théorie du choix social qu'aux deux théories coopératives qui en ont fixé littéralement le style, et nous les traiterons désormais toutes trois ensemble. Nous nous efforcerons d'évaluer à la fois le caractère authentiquement axiomatique de la démarche et, quoique plus brièvement, sa pertinence pour les questions normatives abordées. Le passage des conditions aux règles – qu'on appellera *méthode des caractérisations* – présente un caractère évidemment déductif et formel, mais il ne coïncide avec une axiomatisation que s'il manifeste les propriétés supplémentaires sur lesquelles nous n'avons cessé d'insister.

À la question de savoir si la méthode des caractérisations produit des systèmes formels, on peut répondre facilement par l'affirmative. Les propriétés *(i)*, *(ii)*, *(iii)* se retrouvent analogiquement, comme il en allait en théorie de l'utilité espérée. Le fait que les caractérisations puissent être mathématiquement rudimentaires – en particulier dans les articles de base – ne fait rien à l'affaire[2]. Comme la théorie de la décision, l'économie normative contemporaine abonde en démonstrations que – avec un peu d'effort – on peut considérer comme autant de systèmes formels *miniatures*. Il est plus intéressant de s'interroger sur la place et la nature de la sémantique dans la méthode des caractérisations. La particularité saillante des théories normatives tient à ce qu'elles ne s'appuient pas couramment, ou pas véritablement, sur des *théories informelles constituées*. Il est vrai que des règles comme l'utilitarisme, ou des principes comme le traitement égal des égaux, préexistent dans la réflexion traditionnelle, et il est aussi vrai que, depuis Rawls plus particulièrement, la philosophie morale et politique

1. Deux praticiens de la méthode la résument dans le passage suivant : « We follow an established tradition of game theory by seeking an axiomatic solution to (our) question (see, for example, Nash [1950] and Shapley [1953]). That is, we postulate conditions, or axioms, which we feel are desirable for a solution to satisfy and investigate the logical and mathematical consequences of these axioms. As it turns out, the axioms discussed in this paper are strong enough to determine essentially a unique solution. » (Kalai et Samet [1985], p. 307).

2. Ceux de Nash et de Shapley sont simples et succincts, et d'ailleurs écrits sans prétention méthodologique d'aucune sorte. Contrairement aux passages correspondants chez von Neumann et Morgenstern, ces articles ne revendiquent ni l'un ni l'autre la « méthode axiomatique ».

intervient efficacement, à côté de l'intuition quotidienne et de la tradition, pour renouveler les motivations du travail formalisé. Mais il n'est pas si fréquent qu'une *théorie*, en un sens tant soit peu organique du mot, précède la mise en forme et serve de premier modèle aux « axiomes ». La comparaison avec l'utilité espérée est, à cet égard, éclairante : la notion économique de « loterie » est nettement plus déterminée que celle d'« état de la société », dont nous évoquions plus haut les fluctuations sémantiques considérables. On ne peut pas nier qu'il existe une théorie informelle au point de départ de l'axiomatisation de von Neumann-Morgenstern. Cela n'est pas vrai de la théorie formelle d'Arrow, qui, en même temps qu'une interprétation satisfaisante pour l'ensemble des « axiomes », a dû rechercher *après coup* les théories informelles qui lui correspondent.

Les théories de la négociation ou des jeux coopératifs sont encore plus étrangement placées au point de vue sémantique, parce qu'elles se présentent d'emblée comme des constructions *sous forme réduite*. Un « problème de négociation » est la donnée d'un ensemble de vecteurs d'utilité de provenance indéterminée ; un « jeu coopératif sous forme caractéristique (à utilité transférable) » est la donnée de montants d'utilités cumulés (un pour chaque coalition), encore de provenance indéterminée. Aux systèmes formels bâtis sur ces objets, il paraît difficile d'associer directement autre chose que des idées floues, comme celles-ci : une tractation mutuellement avantageuse et déterminée dans son point d'arrivée (négociation); une entreprise collective que ses participants pourraient quitter pour fonder des entreprises de plus petite taille (jeux coopératifs). L'autre manière de doter ces systèmes d'une interprétation est purement indirecte : elle consiste à sélectionner l'une des théories formelles dont ils représentent la forme réduite et à s'en remettre aux interprétations informelles accompagnant cette théorie. Sans doute est-ce la manière normale de procéder; dans le cas de la négociation, elle est d'ailleurs conforme à ce qu'il est maintenant convenu d'appeler le « programme de Nash » et que l'on rattache à son article de 1953. Mais il peut se trouver plusieurs théories formelles sous-jacentes, celles-ci renvoyant à des registres multiples. Les intuitions précises que l'on peut associer aux concepts de « problème de négociation » ou de « jeu coopératif sous forme caractéristique » seront alors disparates, de sorte que la conclusion demeure : un système formel employant ces concepts ne procède pas d'une théorie informelle structurée[1].

Nous avons proposé de rechercher la sémantique des axiomatisations ensemblistes non seulement dans les considérations informelles qui les entourent, mais aussi dans certains théorèmes du système formel. C'est à ce point qu'on rencontre une particularité des théories normatives qui n'a pas échappé aux observateurs attentifs[2]. Du point de vue des systèmes formels, la distinction entre les « axiomes » (qui énoncent les conditions) et les « solutions » (qui énoncent les règles) est *arbitraire*. En théorie du choix social et de la négociation, ainsi que dans les multiples caractérisations de la valeur au sens de Shapley, les conditions portent directement sur la fonction F qui représente la règle. Elles sont donc de la même nature syntaxique, exactement, que la « solution ». On peut se laisser guider

1. Nash voulait plonger sa théorie de la négociation dans sa théorie des jeux non coopératifs. Les travaux ultérieurs ont montré qu'il n'y avait pas de manière canonique de procéder. Le rattachement des jeux coopératifs aux jeux non coopératifs est sujet à plus de variation encore.

2. Notamment Fleurbaey ([1996], p. 8-9).

ici par une analogie de l'algèbre élémentaire : une caractérisation consiste à résoudre un système d'équations dont F est l'indéterminée. De même qu'en algèbre les solutions affectent la forme d'un système particulier, de même, ici, elles sont, formellement parlant, encore des « axiomes ». Si l'on préfère le point de vue ensembliste, on dira que chaque condition énonce par elle-même une classe de règles, la caractérisation consistant à étudier l'intersection des différentes classes ; vues de cette autre manière, les conditions sont déjà des « solutions ». Considérons l'exemple très simple de la « dictature » et de la « non-dictature » en théorie du choix social : la première évoque plutôt une règle, et la seconde figure d'ordinaire dans une condition, mais on peut aussi bien échanger les rôles.

La théorie de la décision n'est pas exactement logée à la même enseigne, parce que ses principaux théorèmes énoncent les hypothèses dans un langage plus restreint que celui des conclusions. Les fonctions d'utilité qui représentent les relations de préférence doivent être *construites* : elles ne figurent pas encore dans les axiomes. Auprès d'un spécialiste contemporain, on ne ferait pas facilement passer pour « axiomatique » une caractérisation qui partirait du même genre d'objets que ceux qu'elle prétend retrouver[1]. Il faut sans doute nuancer la comparaison : dans les théories normatives, les « solutions » peuvent servir de formules de calcul, de sorte qu'il y a tout de même une différence avec les axiomes (il en va précisément ainsi chez Nash et Shapley). Les caractérisations peuvent remplir certaines fonctions techniques dévolues aux modèles : par exemple, elles servent à établir la cohérence du système ou à vérifier l'indépendance mutuelle des axiomes. Mais ces considérations appartiennent à la pragmatique des systèmes formels. En bref, la dissimilarité linguistique des « axiomes » et des « représentations » influence l'idée que les secondes serviraient de sémantique aux premiers. Inversement, la parenté formelle des « axiomes » et des « solutions » rend cette idée peu satisfaisante.

En résumé, les systèmes produits par la méthode des caractérisations tendent à rester *en deçà* de l'axiomatique : non pour des raisons formelles, mais parce que le sous-développement de la sémantique empêche d'identifier une notion de modèle (propriété A) sur laquelle la méthode effectuerait des va-et-vient (propriété B). Les théoriciens normatifs semblent toutefois préférer l'appellation de « méthode axiomatique » à celle, descriptivement correcte, de « méthode des caractérisations ». On peut les laisser redéfinir les termes comme ils l'entendent, pour autant qu'ils en limitent l'usage à ce qu'ils font : la spontanéité linguistique facilite le progrès des sciences. Mais ils doivent bien comprendre qu'en redéfinissant nominalement la « méthode axiomatique », ils perdent les *connotations valorisantes* qu'en fait ils recherchaient. Le goût du vocabulaire axiomatique est parfois trop insistant pour qu'il n'apparaisse pas comme un effort pour gagner en respectabilité mathématique. Ajoutons que le progrès des idées demande aussi qu'on limite les obstacles à leur circulation, et donc les patois. En l'occurrence, appeler « méthode axiomatique » celle des caractérisations, c'est instaurer un usage dialectal pour une communauté bien restreinte[2].

1. Ainsi, l'analyse de l'« utilité espérée généralisée » à la manière de Machina [1982] ne passe pas pour une axiomatisation et n'est d'ailleurs pas donnée pour telle. (L'hypothèse de différentiabilité faite par Machina se formule directement sur les fonctions d'utilité.)

2. Tous les théoriciens normatifs ne poussent pas la candeur au degré de Thomson [2001].

Au demeurant, la valeur intrinsèque des caractérisations est parfois considérable. Ce point ressort d'autant mieux qu'on aperçoit la proximité de la méthode avec celle de l'éthique traditionnelle; sous cet angle, elle est plus riche que la méthode axiomatique. La distinction des conditions et des règles, dans le formalisme, renvoie à celle, qui est de nature morale, entre les *normes* et les *règles d'évaluation ou d'action.* Les normes s'expriment universellement et catégoriquement : « il ne faut pas chercher à réaliser un état de la société auquel les individus dans leur ensemble en préféreraient un autre », « il faut attribuer les mêmes ressources à deux individus placés dans les mêmes circonstances ». La nature même de ces énoncés interdit de les mettre en pratique tels quels. Pris en eux-mêmes, ils sont typiquement insuffisants pour autoriser une conclusion pratique; ils se donnent souvent d'ailleurs comme des prohibitions plutôt que comme des maximes positives. Conjointement, ils peuvent entrer en conflit ou, tout aussi bien, ne pas suffire encore à déterminer les conclusions. À côté des normes, il faut donc des règles pragmatiques, qu'il s'agisse de recommandations d'action ou, simplement, de classements des états en plus ou moins désirables : c'est à ce niveau que s'effectue la synthèse nécessaire des normes multiples, avec les arbitrages éventuels qui s'imposent. La synthèse recherchée ne relève pas d'une décision au cas par cas, mais d'une règle. C'est ainsi que les conceptions éthiques se présentent couramment selon deux modalités hiérarchisées, quoique toutes deux généralisantes. La distinction qui intéresse les théoriciens normatifs trouve ainsi sa justification, loin d'une analogie mathématique pompeuse, mais dans la tradition d'analyse morale qu'elle perpétue.

On a cependant contesté la méthode des caractérisations pour l'une ou l'autre des raisons suivantes. On lui reproche d'abord de conduire trop facilement à des impossibilités. Cette critique est au fond prise en compte par ceux-là mêmes qui la pratiquent : ils regardent les résultats négatifs comme d'autant plus intéressants qu'ils seront bientôt suivis de caractérisations positives. Le sort particulier qui est fait au théorème d'Arrow, et, dans un domaine voisin, au théorème de Gibbard [1973] sur la non-manipulabilité des procédures de vote, provient de ce qu'ils ont guidé heuristiquement la théorie vers les règles qui surmontent le verdict d'impossibilité[1]. Même en se limitant aux résultats positifs, on a pu dire – c'est une autre objection – que la méthode était insuffisamment contrainte : une même règle admet une pluralité de caractérisations qu'on ne peut pas classer sans arbitraire en « pertinentes » et « non pertinentes », alors même qu'elles pointent vers des intuitions normatives diversifiées, sinon conflictuelles. Le désordre inhérent à l'intuition morale pré-théorique se retrouverait, sous une forme subtile, dans la prolifération de théorèmes démontrés un peu trop facilement par des spécialistes ingénieux. Par ailleurs, la mise en équivalence des règles et de certaines normes abstraites n'apporte pas toujours de précisions par rapport à la connaissance directe des règles : c'est une flèche qu'on a pu diriger contre les théories du choix social post-arroviennes[2]. Enfin, c'est une difficulté d'un autre genre, les caractérisations peuvent dépendre étroitement des hypothèses faites sur les domaines de définition. La fonction dictatoriale d'Arrow ne

1. Voir par exemple Moulin ([1988], p. 3) et les remarques de Sen allant dans le même sens en introduction à l'ouvrage.

2. Par exemple, connaître la norme de comparabilité interpersonnelle de l'utilitarisme n'apprend pas grand chose une fois qu'on connaît la règle elle-même.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138

constitue pas la meilleure illustration à cet égard, parce que le théorème d'impossibilité a relativement bien surmonté l'expérimentation théorique faite sur les « domaines restreints », mais les exemples ne manquent pas ailleurs.

En liaison avec ces différentes critiques, certains théoriciens négligent l'inférence des conditions aux règles pour *étudier les conséquences des règles prises comme termes premiers*. L'analyse est encore déductive, quoique très différente de la précédente. Elle a remporté un succès particulier en théorie du vote, où l'objectif pratique de la démarche était plus évident qu'en économie normative. Dans ce domaine, les caractérisations existantes ne passent pas pour être spécialement éclairantes : en dehors du cas élémentaire de deux candidats, la règle de la majorité simple ne se laisse pas facilement caractériser[1]. Il est alors tentant d'examiner les propriétés concrètes des règles, par exemple la fréquence des « profils de préférence » pour lesquels la règle de la majorité simple engendre des cycles, la règle de Condorcet détermine un gagnant, etc. Poussant l'idée plus loin, on fera varier simultanément les profils et les règles usuelles, en classant les profils suivant leur aptitude à fournir un verdict indépendant ou non de la règle retenue[2].

Les critiques auxquelles nous venons de faire écho portent sur la méthode des caractérisations elle-même, et elles sont évidemment distinctes de celle que nous avons avancée, qui concernait seulement la qualification axiomatique de la méthode. Mais les deux critiques peuvent se rencontrer ainsi : en mettant en avant la « méthode axiomatique » plutôt que, simplement, le formalisme et la déduction, on est implicitement conduit à privilégier un traitement *méta-éthique* de la théorie normative par rapport à l'analyse éthique directe. L'axiomatisation, on l'a dit, approfondit la séparation des signes et du sens qui est présente dans les formalismes en général ; elle autonomise les systèmes formels au point de les constituer comme des objets d'étude indépendants. En recherchant l'analogie de la méta-mathématique plutôt que celle des procédés d'examen traditionnels en théorie morale, on ne tire pas l'économie normative dans la direction la plus féconde heuristiquement, et l'on risque de d'orienter l'effort intellectuel vers des exercices ingénieux, mais secondaires.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANDLER D. [1990], « Logique mathématique », *Encyclopædia Universalis*, 13, p. 966-977.

ARROW K.J. [1951], *Social Choice and Individual Values*, New Haven, Yale University Press, Cowles Foundation Monographs (2e éd. révisée, 1963).

D'ASPREMONT [1985], « Axioms for Social Welfare Orderings », dans HURWICZ L., SCHMEIDLER D. et SONNENSCHEIN H. (eds), *Social Goals and Social Organizations*, Cambridge, Cambridge University Press.

AUMANN R.J. [1976], « Agreeing to disagree », *The Annals of Statistics*, 4, p. 1236-1239.

AUMANN R.J. [1999], « Interactive Epistemology, I : Knowledge, II : Probability », *International Journal of Game Theory*, 28, p. 261-300 et 301-314.

BALZER W. et HAMMINGA B. [1989] (eds), *Philosophy of Economics*, Dordrecht, Kluwer.

BLANCHÉ R. [1955], *L'axiomatique*, Paris, Presses universitaires de France.

1. Voir Laslier [1999].

2. Cette méthode est due plus particulièrement au mathématicien Saari. Pour plus de détails, voir Merlin et Lepelley [1999].

BOSSERT W. et WEYMARK J.A. [2000], « Utility in Social Choice », dans BARBERÀ S., HAMMOND P. et SEIDL C. (eds), *Handbook of Utility Theory*, II, Dordrecht, Kluwer.
BOURBAKI N. [1962], « L'architecture des mathématiques », dans F. LE LIONNAIS [1962].
BOURBAKI N. [1960], *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.
CARNAP R. [1958], *Introduction to Symbolic Logic*, New York, Dover (éd. originale, *Einführung in die symbolische Logik*, Berlin, Springer, 1954.)
CAVAILLÈS J. [1937], *Méthode axiomatique et formalisme*, thèse principale pour le doctorat d'État (rééd. Paris, Hermann, 1981).
DEBREU G. [1959], *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, New Haven, Yale University Press, Cowles Foundation Monographs.
DEBREU G. [1983], *Mathematical Economics*, Cambridge, Cambridge University Press (avec une introduction de W. Hildenbrand).
DEBREU G. [1986], « Theoretic Models : Mathematical Form and Economic Content », *Econometrica*, 54, p. 1259-1270.
DIEUDONNÉ J. [1939], « Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques », *La Revue scientifique*, 1939, 77, p. 224-232 (repris dans F. LE LIONNAIS [1962]).
DUBUCS J. [1990], « Logiques non classiques », *Encyclopædia Universalis*, 13, p. 977-992.
FISHBURN P. [1982], *The Foundations of Expected Utility*, Dordrecht, D. Reidel.
FISHBURN P. et WAKKER P. [1995], « The Invention of the Independence Condition for Preferences », *Management Science*, 41, p. 1130-1144.
FLEURBAEY M. [1996], *Théories économiques de la justice*, Paris, Economica.
FRIEDMAN M. et SAVAGE L.J. [1948], « The Utility Analysis of Choices Involving Risks », *Journal of Political Economy*, 56.
GRANGER G. [1955], *Méthodologie économique*, Paris, Presses universitaires de France.
GRANGER G. [1967], *Pensée formelle et science de l'homme*, Paris, Aubier.
GUILLAUME M. [1978], « Axiomatique et logique », dans J. DIEUDONNÉ (dir.), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, p. 417-483.
HALÉVY E. [1901], *La formation du radicalisme philosophique*, tome II, *L'évolution de la doctrine utilitaire de 1789 à 1815*, Paris, Félix Alcan (nouv. éd. critique, Paris, Presses universitaires de France, 1995).
HERSTEIN I.N. et MILNOR J. [1953], « An Axiomatic Approach to Measurable Utility », *Econometrica*, 21, p. 291-297.
HILBERT D. [1899], *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.
INGRAO B. et ISRAEL G. [1987], *Lo mano invisible*, Rome, Laterza. Trad. anglaise, *The Invisible Hand*, Cambridge (Mass.), The MIT Press, 1990.
ISRAEL G. [1981], « Rigor and Axiomatics in Modern Mathematics », *Fundamenta Scientiae*, 2, p. 205-219.
ISRAEL G. et GASCA A.M. [1995], *Il mondo come gioco matematico – John von Neumann scienziato del Novecento*, Rome, La Nuova Italia Scientifica.
KALAI E. et SAMET D. [1985], « Monotonic Solutions to General Cooperative Games », *Econometrica*, 53, p. 307-327.
KANEKO M. [2002], « Epistemic Logics and their Game-Theoretic Applications : Introduction », *Economic Theory*, 19, p. 7-62.
KLEENE S. [1952], *Introduction to Metamathematics*, North Holland, Amsterdam.
LASLIER J.F. [1999], « La norme majoritaire », *Revue économique*, 50, p. 669-698.
LE LIONNAIS F. [1962] (dir.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, nouv. éd. augmentée, Paris, Librairie Albert Blanchard.
LISMONT L. et MONGIN P. [1994], « On the Logic of Common Belief and Common Knowledge », *Theory and Decision*, 37, p. 75-106.
MACKINSEY J.C.C., SUGAR A.C. et SUPPES P. [1953], « Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics », *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2, 273-282.
MACHINA M. [1982], « Expected Utility' Analysis Without the Independence Axiom », *Econometrica*, 50, p. 277-323.

MARSCHAK J. [1950], « Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility », *Econometrica*, 18, p. 112-141.

MERLIN V. et LEPELLEY D. [1999], « Analyse géométrique et probabiliste des règles de vote avec une application au scrutin majoritaire à deux tours », *Revue économique*, 50, p. 699-714.

MILL J.S. [1836], « On the Definition of Political Economy », *Westminster Review*. Également dans *Essays on Some Unsettled Questions of Political Economy* (1844). Repris dans NAGEL E., *John Stuart Mill's Philosophy of Scientific Methods*, New York, Hafner Press (1950).

MILL J.S. [1843], *A System of Logic*, Londres, Longmans, Green and Co (8e éd., 1881).

MISES L. von [1949], *Human Action*, New Haven, Yale University Press.

MISES L. von [1976], *Epistemological Problems of Economics*, New York, New York University Press.

MONGIN P. [1999], « Normes et jugements de valeur en économie normative », *Information sur les sciences sociales/Social Science Information*, 38, p. 521-553.

MONGIN P. [2001a], « La théorie économique a-t-elle besoin des mathématiques? », *Commentaire*, 93, printemps 2001, p. 129-140.

MONGIN P. [2001b], « A Note on Mixture Sets in Decision Theory », *Decisions in Economics and Finance*, 24, p. 59-69.

MOULIN H. [1988], *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge, Cambridge University Press, Econometric Society Monograph.

NASH J.F. [1950], « The Bargaining Problem », *Econometrica*, 18, p. 155-162.

NASH J.F. [1953], « Two-Person Cooperative Games », *Econometrica*, 21, p. 128-140.

NEUMANN J. von et MORGENSTERN O. [1944], *Theory of Games and Economic Behavior*, New York, Wiley (2e éd. révisée, 1947).

PASCAL B. *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, dans *Œuvres complètes*, La Pléiade, Paris, Gallimard, p. 575-604.

PASCH M. [1882], *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, Teubner.

PEANO G. [1888], *Arithemetices principia, nova methodo exposita*, Turin.

PETERS H. [1992], *Axiomatic Bargaining Game Theory*, Dordrecht, Kluwer.

ROTH A.E. [1979], *Axiomatic Models of Bargaining*, Berlin, Springer.

SAMET D. [1990], « Ignoring Ignorance and Agreeing to Disagree », *Journal of Economic Theory*, 52, 190-207.

SAMUELSON P.A. [1938], « A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior », *Economica*, [n.s.], 5, p. 61-71.

SAVAGE L.J. [1954], *The Foundations of Statistics*, New York, Dover (2e éd., 1972).

SCHMIDT C. [1985], *La sémantique économique en question*, Paris, Calmann-Lévy.

SEN A.K. [1970], *Collective Choice and Social Welfare*, Amsterdam, North Holland.

SEN A.K. [1986], « Social Choice Theory », dans ARROW K.J. et INTRILLIGATOR M.D., *Handbook of Mathematical Economics*, Amsterdam, North Holland, tome 3.

SEN A.K. [1999], « The Possibility of Social Choice », *American Economic Review*, 89, p. 349-378.

SENIOR N.W. [1836], *An Outline of the Science of Political Economy* (rééd. Londres, 1938).

SHANKER S.G. [1988], (ed.) *Gödel's Theorem in Focus*, Londres, Routledge.

SHAPLEY L.S. [1953], « A Value for n-Person Games », *Contributions to the Theory of Games II*, p. 307-317.

SNEED J.D. [1971], *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht, Reidel.

STEGMÜLLER W. [1976], *The Structure and Dynamics of Scientific Theories*, New York, Oxford University Press.

STEGMÜLLER W., BALZER W. et SPOHN W. [1982] (eds), *Philosophy of Economics*, Berlin, Springer.

STIGUM B. [1990], *Toward a Formal Science of Economics*, Cambridge, Cambridge University Press.

SUPPES P. [1970], « Set-Theoretic Structures in Science », *Mimeo*, Stanford University.

TARSKI A. [1941], *Introduction to Logic*, New York, Oxford University Press.
THOMSON W. [1994], « Cooperative Models of Bargaining », dans AUMANN R. et HART S. (eds), *Handbook of Game Theory II*, chap. 35, Amsterdam, North Holland.
THOMSON W. [2001], « On the Axiomatic Method and Its Recent Applications to Game Theory and Ressource Allocation », *Social Choice and Welfare*, 18, p. 327-386.
UZAWA H. [1960], « Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption », dans ARROW K.J., KARLIN S. et SUPPES P. (eds), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, Stanford, Stanford University Press.
VILKS A. [1992], « A Set of Axioms for Neo-Classical Economics and the Methodological Status of the Equilibrium Concept », *Economics and Philosophy*, 8, p. 51-82.
VILKS A. [1995], « On Mathematics and Mathematical Economics », *Greek Economic Review*, 17, p. 177-204.
VILKS A. [1998], « Axiomatization », dans DAVIS J.B., WADE HANDS D. et MÄKI U., *Handbook of Economic Methodology*, Cheltenham, Elgar, p. 28-32.
WEINTRAUB R.E. et MIROWSKI P. (eds) [1994], « The Pure and the Applied : Bourbakism Comes to Mathematical Economics », *Science in Context*, 7, p. 245-272.

Revue économique — vol. 54, N° 1, janvier 2003, p. 99-138