UNE SOURCE MÉCONNUE DE LA THÉORIE DE L'AGRÉGATION DES JUGEMENTS

Philippe Mongin

Presses de Sciences Po | *Revue économique*

2012/4 - Vol. 63
pages 645 à 657

ISSN 0035-2764

Une source méconnue de la théorie de l’agrégation des jugements

Philippe Mongin*

On présente brièvement ici la contribution de Georges-Théodule Guilbaud (1912-2006) aux théories agrégatives contemporaines. Précurseur méconnu, il anticipe la conception algébrique de l’agrégation et la théorie plus récente de l’agrégation des jugements, qui généralise celle du choix social en remplaçant le concept de préférence par celui de jugement. L’article insiste plus particulièrement sur cette dernière liaison.

A NEGLECTED SOURCE OF JUDGMENT AGGREGATION THEORY

The paper is a brief account of Georges-Théodule Guilbaud’s (1912-2006) contributions to contemporary aggregative theories. An unnoticed precursor, Guilbaud anticipated on the algebraic conception of aggregation and on the more recent judgment aggregation theory, which generalizes social choice theory by replacing preferences by judgments. The paper especially emphasizes this last connection.

Classification *JEL* : B21, B31, D71, E10.

Quand des économistes, des statisticiens ou des informaticiens parlent d’*agrégation*, ils entendent, par un anglicisme devenu banal[1], l’opération qui, à une multiplicité d’objets relevant de la même catégorie, mais offrant des différences individuelles, associe un exemplaire de cette catégorie de nature à représenter adéquatement toute la multiplicité. L’opération a un but pragmatique général : il est plus facile de raisonner sur l’exemplaire que sur la multiplicité. En économie, où elle importe plus qu’ailleurs, elle s’accompagne de conséquences théoriques précises : si elle réussit, la multiplicité initiale se transforme en une réalité collective qui devient un nouvel objet d’étude, et si elle échoue et que cet échec ne soit

* CNRS et Groupe HEC, GREGHEC. *Correspondance :* 1 rue de la Libération, F-78350 Jouy-en-Josas. *Courriel :* mongin@greg-hec.com

L’auteur remercie de leurs observations le lecteur de la *Revue économique*, ainsi que Franz Dietrich, David Eckert, Françoise Forges et Jean-Marc Tallon.

1. D’après le dictionnaire, à côté du sens administratif qu’on lui connaît, le mot *agrégation* (anciennement *aggrégation*) se dit de tout assemblage de substances ou de parties qui est assez cohérent pour s’opposer à leur séparation. Rousseau l’emploie dans ce sens physique originel tout en le tirant déjà quelque peu vers le sens technique contemporain : « Comme les hommes ne peuvent engendrer de nouvelles forces, mais seulement unir et diriger celles qui existent, ils n’ont plus d’autre moyen pour se conserver que de former par aggrégation une somme de forces qui puisse l’emporter sur la résistance, de les mettre en jeu par un seul mobile et de les faire agir de concert. » (*Œuvres complètes*, II, p. 360.)

pas accidentel, la conclusion est encore instructive même si elle déçoit. L'intérêt conceptuel de l'agrégation n'est jamais plus manifeste que lorsqu'elle porte sur des relations ou des fonctions liant des variables économiques, et non pas (ou non pas exclusivement) sur ces variables mêmes. Cette forme avancée s'illustre par le cas des relations de préférence et celui des fonctions de production, qui ont donné lieu à des développements célèbres.

À première vue, les problèmes logico-mathématiques soulevés par l'agrégation dépendent étroitement du type d'objets individuels que l'on veut représenter, et la littérature technique aggrave cette impression en soulignant leurs différences[1]. De fait, un type donné requiert souvent une théorie spéciale pour apporter une solution ou conclure qu'il n'en existe aucune ; les relations de préférences et les fonctions de production illustrent encore facilement le propos. Mais il est aussi vrai que des liaisons logiques et conceptuelles sont apparues entre les théories spéciales, et que s'est fait jour l'idée audacieuse d'une théorie générale de l'agrégation qui les engloberait toutes. On est aujourd'hui encore loin du compte, mais les perspectives unificatrices ou, du moins, comparatives ont progressé en même temps que s'accroissait l'échantillon de problèmes tranchés positivement ou négativement.

La *Revue économique* remet aujourd'hui à l'honneur Georges-Théodule Guilbaud (1912-2006), qui fut l'un des premiers à étudier l'agrégation généralement et à faire avancer par ce moyen l'unification et le traitement des problèmes qu'elle soulève. Si le travail de Guilbaud mérite ainsi l'éloge, c'est parce qu'il anticipe un courant actuel qui est lui-même porté par l'objectif de généralisation et qui le réalise avec un certain succès, la *théorie de l'agrégation des jugements*, dite aussi *de l'agrégation logique* en raison des emprunts qu'elle fait à la logique formelle. L'intérêt que provoque cette théorie a tout naturellement conduit à lui chercher des prédécesseurs, et il est apparu que le titre en revenait d'abord à Guilbaud. La *Revue* se propose de lui rendre justice, et non pas seulement hommage, car il aura traversé le siècle dans une relative obscurité, si l'on excepte de rares, mais flatteuses, mentions dans la littérature internationale, et les marques d'admiration qu'il reçut constamment d'un carré de disciples parisiens. Avec l'autorisation de l'ISMEA[2], la *Revue économique* reprend l'article paru dans *Économie appliquée* en 1952, « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », dans lequel Guilbaud manifeste ses fortes prémonitions. Un hasard du calendrier fait que la réédition de 2012 coïncide avec un double anniversaire, le soixantième de la parution de l'article et le centième de la naissance de l'auteur. L'équipe éditoriale de la *Revue* et l'auteur de cette présentation qu'elle lui a confiée se réjouissent de pouvoir ainsi lier la redécouverte d'un précurseur et la commémoration de ses dates principales[3].

Si la notoriété de l'article ne se mesure pas à l'importance de sa contribution, c'est que, mathématicien d'origine et de vocation, Guilbaud ne se préoccupait guère de conquérir le public d'économistes auquel son travail était en fait destiné. Mais c'est aussi que, inclassable parmi les mathématiciens de son temps, Guilbaud s'exprimait dans la même langue française ordinaire que les

1. Voir, par exemple, Van Daal et Merkies ([1984], p. XI).

2. Aimablement accordée par sa directrice, Rolande Borelly, à qui nos remerciements vont au nom de la *Revue*.

3. Quand nous citerons un passage de Guilbaud, nous mentionnerons d'abord la pagination d'*Économie appliquée*, puis celle de la *Revue économique*.

Revue économique – vol. 63, N° 4, juillet 2012, p. 645-658

savants des XVII^e et XVIII^e siècles, dont il avait fait ses modèles admirés. Certes, Guilbaud s'autorise de la notation et des calculs, parfois même avancés, mais il évite le formalisme continu et il ne sépare pas toujours ce qui, à l'intérieur d'un raisonnement, relève des hypothèses, des preuves et des résultats. On ne pouvait être plus hostile que lui à la méthode axiomatique devenue commune en mathématiques et, au-delà, dans certaines théories économiques qui l'emploient, par exemple celle de l'équilibre général concurrentiel[1].

Il est difficile, dans ces conditions, d'identifier sans conteste les apports de Guilbaud, mais on peut lui en donner trois avec une certaine assurance. En premier lieu, il conceptualise abstraitement l'agrégation et il sait tirer des effets utiles de la définition nouvelle qu'il en donne. En deuxième lieu, il anticipe la théorie agrégative récente que nous venons de dire. Il l'entrevoit assez clairement déjà pour ramener à un simple cas particulier *la théorie de l'agrégation des préférences* qu'Arrow développait dans les années mêmes où il écrivait. Dans cet englobement réside, selon nous, la découverte principale du savant français, découverte que son plus glorieux prédécesseur américain manque tout à fait. Le deuxième apport résulte d'une certaine manière du premier, car c'est le point de vue abstrait sur l'agrégation qui fait concevoir à Guilbaud la notion elle-même abstraite de *jugement*, dont on a compris seulement cinquante ans plus tard qu'elle pouvait suffire à transformer l'agrégation en impossibilité sans qu'il soit besoin de parler de préférences. Il est vrai que Guilbaud s'était mis à l'école de Condorcet, auquel on peut rattacher, comme à une source commune, tous les développements actuels sur les jugements collectifs[2]. Enfin, et c'est la contribution la moins mal reconnue, il participe à sa manière au développement de la théorie classique du choix social, en reprenant le concept de préférences donc ; il apporte en effet des précisions au théorème d'impossibilité d'Arrow et aux deux théorèmes de possibilité que Black et May démontrent à propos du vote majoritaire.

Avant de suivre ces trois axes, nous consacrerons quelques mots à la carrière intellectuelle de Guilbaud, ce qui fera connaître un autre de ses mérites : sans doute plus que quiconque au XX^e siècle, il aura contribué à rétablir la réputation de Condorcet, que le XIX^e siècle avait presque uniformément rejeté, en l'accusant soit d'être obscur, soit d'appliquer futilement, voire grotesquement, les calculs mathématiques à la société[3]. Les quelques indications qui suivent proviennent de la revue *Mathématiques et sciences humaines*, celle-là même où Guilbaud écrivit souvent, après qu'il l'eut fondée en 1962 pour défendre et illustrer la méthode de son cher Condorcet[4].

Élève de l'École normale supérieure de 1932 à 1935, Guilbaud y étudie notamment les probabilités et la statistique, n'y manifestant pas la moindre sympathie pour l'orientation formaliste qui se dessine alors chez ses condisciples

1. Mongin [2003] traite de la méthode axiomatique en économie. Cette tendance correspond manifestement à ce que Guilbaud rejetait.

2. Guilbaud ne se penche malheureusement pas sur le théorème du jury, qui fait aujourd'hui l'objet d'une vaste littérature technique (voir Laslier [2004]).

3. Plus lointainement, la transmission s'est effectuée grâce à Todhunter [1865] et à sa remarquable histoire du calcul des probabilités. Le mathématicien britannique s'attache particulièrement au théorème du jury, qu'il résume avec compétence tout en le jugeant inutile à la compréhension de la société.

4. Nous avons consulté les informations réunies dans *Mathématiques et sciences humaines* [2008], ainsi qu'un texte plus développé de Monjardet [2011].

(le mouvement Bourbaki est fondé à l'ENS en 1935). Il sera professeur de classe préparatoire durant de longues années, notamment au lycée de Dijon de 1941 à 1947, où il a pour collègue le philosophe Gilles-Gaston Granger, dont les économistes connaissent les travaux consacrés à la méthodologie de leur discipline. Cette rencontre semble avoir été déterminante pour chacun, mais plus encore sans doute pour Granger, de huit ans plus jeune. Condorcet fut leur maître commun : on retrouve son inspiration dans le travail d'application mathématique de l'aîné, comme dans celui, réflexif et philosophique, du cadet. La même expression de « mathématique sociale » se retrouve sous les deux plumes pour désigner l'inspiration du marquis et sa reprise contemporaine chez Arrow et d'autres[1].

Pendant son séjour à Dijon, Guilbaud s'était éloigné des mathématiques pures en donnant cours à la Faculté des Lettres, et il sauta finalement le pas en 1947, date à laquelle il devint chercheur à l'Institut de sciences économiques appliquées (ISEA), que François Perroux avait fondé trois ans auparavant ; il y restera jusqu'en 1955. C'est dans ce cadre institutionnel qu'il composera l'article aujourd'hui republié[2]. En juin 1952, Perroux organise un colloque sur « L'avantage collectif » auquel il fait participer Guilbaud. L'invité d'honneur n'était autre que Kenneth Arrow, dont la monographie récente, *Social Choice and Individual Welfare* (1951), circulait en provoquant les plus vives discussions. Dans son dernier numéro de la même année 1952, *Économie appliquée* rassemble les contributions faites au colloque, dont celle d'Arrow, qui consiste à résumer sa monographie[3], et celle de Guilbaud, dont il est impossible de savoir jusqu'à quel point il l'a modifiée avant la publication.

Pas plus qu'on ne peut répondre à cette question, on ne peut décider si Guilbaud avait formé ses idées avant de découvrir Arrow[4]. C'est un fait que, dans son texte publié, Guilbaud renvoie souvent – pas moins de sept fois – à *Social Choice and Individual Values*. La plupart de ces mentions opèrent de simples rapprochements techniques, mais l'une d'elles exprime sans détour la dette de l'auteur :

> Un théorème fort important a été démontré par K.J. Arrow. […] Nous allons retrouver ce résultat un peu plus loin. (P. 82 ; *infra*, p. 696.)

Une autre mention, la toute première, amorce l'éloge tout en le mêlant d'une réserve subtile :

> Les profondes études de K. J. Arrow ont ramené l'attention sur quelques difficultés logiques de la construction d'une volonté collective. Ce ne sera pas, je l'espère, diminuer la valeur et l'originalité de ces belles recherches que d'évoquer, à leur occasion, Rousseau

1. Granger [1956] consacrera un ouvrage entier à Condorcet, qui provient de sa thèse complémentaire pour le doctorat ès lettres. La thèse principale, consacrée à la *Méthodologie économique*, paraîtra sous ce titre en 1955. La notion de « mathématique sociale » y est aussi présente, et on la retrouvera dans la suite de son œuvre.

2. Ainsi que deux autres articles donnés à *Économie appliquée* en 1949 et en 1952, qu'il consacre à la théorie du partage et à la théorie des jeux ; il les reprendra en même temps que le nôtre dans un recueil de 1968.

3. Le numéro spécial d'*Économie appliquée* peut donc se targuer d'un article d'Arrow, et qui plus est, en langue française. Les *Collected Papers* [1983] le reprendront en langue anglaise.

4. D'autres influences ont pu jouer, en particulier celle de Nataf [1948], qui venait de démontrer un théorème unificateur sur l'agrégation des fonctions microéconomiques.

Revue économique – vol. 63, N° 4, juillet 2012, p. 645-658

ou Condorcet : une ligne de pensée, interrompue quant aux travaux mathématiques et logiques, se trouve restituée – sans rien détruire ni répéter. Il faut en féliciter les ouvriers et aller de l'avant. (P. 41 ; *infra*, p. 661.)

En situant Arrow dans une lignée d'auteurs plus anciens, Guilbaud semble vouloir atténuer l'originalité que, simultanément, il lui prête. Le tour final, « aller de l'avant », fait assez bien comprendre que son prédécesseur n'épuise pas la question et que lui-même entend la renouveler.

En retour de ces amabilités complexes, la seconde édition de *Social Choice and Individual Values* (1963) fait de l'article d'*Économie appliquée* un éloge satisfaisant, mais retenu. Arrow signale « a remarkable exposition of the theory of collective choice and the general problem of aggregation due to G.T. Guilbaud » ([1963], p. 92), ce qui peut laisser entendre que l'article n'aurait pas d'originalité particulière. En y revenant plus loin, Arrow donne à Guilbaud un résultat qui va dans la direction du sien (*ibid.*, p. 100-101), et l'on peut juger que, là encore, le propos favorable est mêlé de réserve[1].

Guilbaud n'aura finalement influencé le fondateur de la théorie du choix social, et celle-ci à travers lui, que par un seul côté, celui qu'accentuait dangereusement son passage sur « les profondes études de K.J. Arrow », c'est-à-dire le côté historique. En 1951, Arrow traite du « paradoxe du vote », c'est-à-dire de la cyclicité de la règle majoritaire dans certains cas de préférences, en l'attribuant à un mathématicien obscur de Melbourne, Edward J. Nanson (1850-1936). La seconde édition, en 1963, rend justice au véritable inventeur, Condorcet, tout en prenant acte de la connaissance qu'en avait Guilbaud[2]. Elle signale aussi brièvement le mémoire de Borda, source probable des travaux de Condorcet sur le vote. Entre-temps, Black avait publié sa *Theory of Committees and Elections* [1958] en consacrant force détails à ses prédécesseurs français et anglo-saxons. Après Arrow et Black, il sera impossible de mathématiser la politique sans évoquer le marquis de Condorcet, ses démêlés d'académicien avec le chevalier de Borda, et les solutions que l'un et l'autre avancèrent pour améliorer la règle de la majorité. Mais le premier article de Black [1948], qui avait inspiré Arrow, ne signalait pas la filiation historique du paradoxe du vote, et Guilbaud, qui restitue précisément ce qu'en dit Condorcet (p. 44-50 ; *infra*, p. 663-669), mérite l'antériorité de la redécouverte. On peut le créditer aussi de celle de Borda, même s'il ne se penche guère sur l'inspirateur et rival de Condorcet.

En 1955, Guilbaud fut élu à la sixième section de l'École pratique des hautes études, future École des hautes études en sciences sociales, sur une direction de recherche intitulée « Méthodes mathématiques des sciences sociales ». On admirera la constance de ses orientations intellectuelles ; on admirera aussi qu'elles aient pu convenir aux deux régents de l'institution, Lucien Febvre et Fernand Braudel[3]. L'esprit combinatoire – Guilbaud dit « algébrique » – règne en maître

1. Arrow comprend le résultat qu'il prête à Guilbaud à la lumière d'une condition, la neutralité, que lui-même n'avait pas encore isolée en 1951 (voir ci-dessous). Il conteste une extension, il est vrai très obscure, que Guilbaud prétend faire ensuite de ses conclusions (« The argument is very terse, and I am unable to determine if it is thoroughly correct », [1963], p. 101, n. 24).

2. Arrow ([1963], p. 93-96) loue au passage l'étude de Granger, qui participe de la redécouverte. On trouvera, dans cette étude et dans l'article même de Guilbaud, les références aux passages pertinents de Condorcet. Voir aussi le recueil de Crépel et Gilain [1989].

3. Febvre la dirigeait en 1955 et Braudel lui succéda l'année suivante.

dans l'article d'*Économie appliquée*, alors que l'école des *Annales*, en fait ignorante des mathématiques, n'y voyait qu'un simple moyen de traiter les données quantitatives. Mais il est vrai que Guilbaud avait plus d'une corde à son arc : devenu statisticien appliqué à l'ISEA, il avait accru sa bibliographie de plusieurs études sur les séries économiques. Le reste de sa carrière, jalonné par la fondation d'un groupe de mathématique sociale en 1958[1], par celle de la revue déjà mentionnée en 1962, et par de nombreux travaux de mathématiques appliquées, sort de la période que nous considérons.

Selon Guilbaud, les problèmes agrégatifs se ramènent à une forme commune, qu'il décrit notamment ainsi :

> … il s'agit toujours de combiner en une seule des représentations individuelles et d'examiner si le résultat satisfait ou non à certaines exigences internes de cohérence. (P. 60 ; *infra*, p. 678.)

Pour établir son affirmation, Guilbaud rapproche l'« effet Condorcet » (nouvelle dénomination du paradoxe qui en fait ressortir l'importance) d'un problème agrégatif très différent remarqué par Cournot : celui-ci avait fait comprendre au naïf statisticien Quetelet que, si l'on faisait la moyenne de plusieurs caractères physiques d'une population (taille, poids, force, etc.), on risquait d'obtenir un ensemble de données incohérentes au point de vue physiologique. Dans un rapprochement plus audacieux, Guilbaud évoque Dom Quentin et les docteurs qui cherchaient à établir la version définitive d'un texte sacré en appliquant une règle extérieure d'accord entre ses exégètes, par exemple celle de la majorité. Pour identifier le « problème logique préalable » (p. 61 ; *infra*, p. 678) commun aux différents exemples, Guilbaud se sert d'une analogie algébrique : dans tous les cas, on recherche une certaine *loi de composition interne* qui, à l'exemple de l'addition, fait correspondre à plusieurs éléments d'un type algébrique donné un élément unique de ce même type. Ainsi, la théorie mathématique de l'agrégation relèverait plutôt de l'idée d'opération que de celle de fonction. Guilbaud souligne non seulement le caractère interne, qui fait partie de la première idée, mais encore le nombre indéfini d'arguments, où il voit une autre différence avec la seconde ; c'est qu'il se fixe alors sur des opérations *associatives*. La restriction est douteuse, parce qu'un grand nombre de problèmes agrégatifs, à commencer par celui d'Arrow, ne se présentent pas ainsi[2].

Mené par ses analogies algébriques, Guilbaud en est venu à proposer une formulation qui anticipe ce que la littérature postérieure nommera *théorie générale de l'agrégation* (Wilson [1972]) ou, justement, *théorie algébrique de l'agrégation* (Fishburn et Rubinstein [1986]). Suivant sa manière toujours surprenante, Guilbaud introduit cette innovation presque incidemment lorsqu'il revient sur les exemples de Condorcet :

> L'effet Condorcet consiste alors en ceci : après avoir défini une règle d'agrégation au sein d'un ensemble d'objets – (les triplets de ± 1) – on constate l'interdiction de certaines

1. D'abord Groupe de mathématique sociale et de statistique, devenu ensuite Centre de mathématique sociale, aujourd'hui Centre d'analyse et de mathématique sociales.

2. Les problèmes relatifs à l'agrégation des préférences et, d'ailleurs aussi, à l'agrégation des jugements se traitent le plus souvent *à population fixée*. L'associativité conviendrait si on laissait la population varier en même temps que l'agrégat.

Revue économique – vol. 63, N° 4, juillet 2012, p. 645-658

valeurs – (+ 1, + 1, + 1) ou (– 1, – 1, – 1) – pour les objets composants, ne suffit pas pour éviter ces mêmes valeurs à l'objet résultant […]. (P. 57 ; *infra*, p. 675.)

D'après ce passage très dense, les objets que l'on veut agréger, ici des relations de préférences, seront codés sous la forme de vecteurs dont les composantes valent + 1 ou – 1; par exemple, les relations de préférences cycliques (A > B, B > C, C > A) et (B > A, A > C, C > B) se représenteront par (+ 1, + 1, + 1) et (– 1, – 1, – 1). Les contraintes sur le type d'objets, ici les propriétés d'ordre que doivent respecter les relations de préférences, s'exprimeront alors par l'exclusion de certains vecteurs, comme les deux qui viennent d'être écrits. Le problème logique de l'agrégation, devenu problème algébrique dans cette reformulation, est de savoir s'il existe une opération qui associe à chaque *n*-uplet de vecteurs autorisés, *n* étant la taille de la population, un vecteur qui soit lui-même autorisé. La règle du vote majoritaire, en tout cas, ne répond pas à la question posée.

La conception algébrique de l'agrégation met Guilbaud de plain-pied avec *la théorie de l'agrégation des jugements*, et elle fait donc le lien des deux premiers apports que nous avons distingués chez lui. Nous rappellerons très brièvement l'idée générale de cette théorie, que l'on fait remonter d'ordinaire à List et Pettit [2002] et à Nehring et Puppe [2002]. Elle a connu de très nombreux développements qu'on trouvera systématisés chez Mongin et Dietrich [2010]. Un concept simple et abstrait de jugement unifie l'ensemble de ce corpus. Nous l'exposerons dans ses grandes lignes philosophiques avant de le présenter plus techniquement.

Juger que le temps est frais, qu'il faut se couvrir, que Paul est plus petit que Pierre, que Paul est meilleur candidat que Pierre, c'est, chaque fois, accepter la proposition correspondante. Peu importe qu'elle soit, comme l'illustrent ces exemples, factuelle, prescriptive, évaluative, absolue, relative ; dans tous les cas, l'approbation est le même acte positif de l'esprit, que l'on ne tente pas d'analyser plus avant. Il en résulte que la différence des jugements tient uniquement à celle des propositions ; si un jugement est factuel et qu'un autre est évaluatif, cela viendra de ce que l'une des propositions est factuelle et que l'autre est évaluative, sans que la manière d'approuver soit en cause ; et pareillement pour les autres distinctions. De même, juger que le temps n'est pas frais, qu'il ne faut pas se couvrir, etc., c'est encore approuver, par le même acte positif de l'esprit, une proposition qui est, cette fois, négative ; à nouveau, c'est dans la proposition qu'il faut chercher la propriété utile. Il est évidemment possible de suspendre son jugement, de ne pas juger que le temps est frais et ne pas juger qu'il n'est pas frais, et dans cette abstention réside le contraire du jugement, qu'il faut bien distinguer du jugement contraire.

Dans les notions ordinaires de jugement, il se mêle toujours de la logique et de la psychologie. Le concept envisagé ici est celui des logiciens de la fin du XIX^{e} siècle et du début du XX^{e} siècle. Rompant avec la tradition aristotélicienne, ils ont minimisé la composante psychologique en la ramenant à cet acte uniforme et inanalysable que nous avons nommé l'approbation (ils disent plus techniquement l'*assertion*). Du même coup, ils ont accru le rôle de la proposition qui fait l'objet du jugement, lui faisant porter toutes les distinctions logiques et sémantiques pertinentes. Cette méthode d'analyse qui peut sembler banale ne l'était pas du tout lorsqu'elle est apparue. Elle présente l'avantage essentiel de faciliter le traitement technique du jugement par rapport aux procédés de la vieille logique. Les logiciens et les philosophes d'aujourd'hui l'adoptent comme M. Jourdain la prose, c'est-à-dire avec compétence et sans même savoir qu'ils le font.

La théorie nouvelle fixe sous le nom d'*agenda* l'ensemble des propositions qui vont faire l'objet des jugements individuels et collectifs ; il est commode de le représenter comme une énumération de formules logiques $p_1, \ldots, p_m$ prises dans un ordre arbitraire. L'approbation peut alors se représenter ou bien par l'appartenance ensembliste, ou bien par les valeurs de vérité. L'individu (ou la collectivité) qui juge, par exemple, que p_1, que non p_2, … se voit associer, dans un cas, l'ensemble de formules $\{p_1, -p_2, \ldots\}$, et dans l'autre, le vecteur (1, – 1,…). Les deux formalismes – qu'on peut dire *syntaxique* et *sémantique*, respectivement – coexistent dans la théorie actuelle. Tous les ensembles de formules ou tous les vecteurs de vérité ne sont pas autorisés à l'individu (ou à la collectivité) qui juge : les formules de l'agenda, $p_1, \ldots, p_m$, peuvent entretenir des liaisons logiques, et cela imposera, par cohérence, d'exclure certains des ensembles ou certains des vecteurs. Ainsi, lorsque p_2 implique p_1, il faut interdire, dans la représentation syntaxique, l'ensemble $\{-p_1, p_2, \ldots\}$, et dans la représentation sémantique, le vecteur (– 1, 1, …). Généralement parlant, le jugement est soumis à des contraintes logiques variables avec l'agenda considéré, et il en résulte des exclusions déterminées. La théorie générale ou algébrique de l'agrégation part directement de ces exclusions ; elle ne leur attribue pas d'origine particulière. En revanche, la théorie de l'agrégation des jugements les fait remonter à ses objets propres, qui sont les jugements et les agendas ; c'est ainsi que les deux théories se donnent la main[1].

Pour la suite de ce rappel, nous privilégierons la représentation sémantique parce qu'elle correspond à l'esprit et à la notation de Guilbaud. Parmi tous les vecteurs (± 1, ± 1, …) concevables, seul un sous-ensemble D est autorisé, compte tenu des exclusions. Si l'on associe à chaque profil concevable de vecteurs de D un autre vecteur pris dans D, on définit une *fonction de jugement collectif F* qui devient l'objet principal de l'étude. La théorie de l'agrégation des jugements s'est beaucoup penchée sur les fonctions F qui vérifient les conditions suivantes : l'indépendance (le vecteur agrégé s'obtient par agrégation indépendante de chaque composante), la systématicité (l'agrégation se fait composante par composante *et* de la même manière pour chaque composante ; c'est un renforcement de la condition précédente), la préservation de l'unanimité (le vecteur agrégé respecte les composantes identiques entre tous les individus). La leçon générale de la théorie est que, pour des agendas qu'elle précise chaque fois, il n'existe pas de F qui satisfasse soit la systématicité, soit la conjonction de l'indépendance et de la préservation de l'unanimité, sans être du même coup *dictatoriale* (le vecteur collectif est celui d'un individu fixé à travers tous les profils). Dans les résultats les plus récents[2], les agendas sont exactement caractérisés, ce qui veut dire qu'ils sont non seulement suffisants, mais nécessaires pour qu'une fonction F soumise à des conditions données se ramène à la dictature.

Comme l'ont bien fait comprendre Dietrich et List [2007], le théorème d'Arrow et d'autres résultats d'impossibilité en choix social sont de simples cas particuliers des théorèmes précédents. *Il suffit de faire jouer la notion de jugement sur des propositions relatives à la préférence*. Revenant à l'agenda $p_1, \ldots, p_m$, on posera p_1 = « A vaut mieux que B », p_2 = « B vaut mieux que C », p_3 = « A vaut mieux que C », etc. La théorie du choix social fait des hypothèses déterminées sur les préférences, par exemple qu'elles sont transitives ; on les

1. Mongin et Dietrich [2010] développent plus particulièrement cette articulation.
2. Notamment chez Dokow et Holzman (2010).

Revue économique – vol. 63, N° 4, juillet 2012, p. 645-658

transcrira par des contraintes sur l'ensemble D qui vont au-delà de celles de la pure logique ; c'est ainsi que la liaison de p_1, p_2, p_3 créée par la transitivité fera exclure les vecteurs (+ 1, + 1, + 1, …) et (– 1, – 1, – 1, …).

Les sections intitulées « Qu'est-ce qu'une majorité ? » et « Les contradictions inévitables » contiennent chacune un résultat de la théorie de l'agrégation des jugements. Ils sont démontrés sous la condition de *systématicité*, que Guilbaud, à sa manière déconcertante, signale comme au passage et sans lui trouver de nom (p. 85, n. 1 ; *infra*, p. 699, note 2). En substance, le premier résultat (p. 92 ; *infra*, p. 705-706) suppose que l'agenda n'a que deux formules logiques p_1, p_2 et il constitue un *théorème de possibilité* : la fonction F, dans ce cas, est compatible non seulement avec la dictature, mais avec la règle majoritaire et des variantes curieuses, non anonymes, de celle-ci, que Guilbaud fait surgir empiriquement au fur et à mesure qu'il accroît le nombre d'individus. Le second résultat (p. 95 ; *infra*, p. 708) suppose que l'agenda comporte trois propositions p_1, p_2, p_3 au moins, et il constitue un *théorème d'impossibilité* au sens convenu où la fonction F n'autorise plus que la dictature. Comme Eckert et Monjardet [2010] l'ont observé les premiers, ce théorème appartient la théorie actuelle. On peut le rapprocher d'un énoncé de 2006 qui a sensiblement la même force logique[1] et faire ainsi comprendre ce que l'anticipation de Guilbaud a de remarquable. En prenant un recul plus important, on trouvera le second résultat de Guilbaud moins impressionnant, parce qu'il devient un simple cas particulier d'un énoncé très général, que nous avons nommé ailleurs le *théorème d'impossibilité canonique* (Mongin et Dietrich [2010]). Le théorème en question couvre aussi bien le premier résultat de Guilbaud si on restreint celui-ci à une affirmation de possibilité : la dictature n'est pas la seule règle quand l'agenda contient deux formules. La puissance du théorème canonique pour retrouver des résultats des deux types lui vient de ce qu'il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un agenda soit dictatorial.

Tels qu'on les lit dans l'article, les deux résultats sont moins clairs que leurs transcriptions proposées, car Guilbaud utilise sans les définir les concepts de la théorie contemporaine, c'est-à-dire l'agenda $p_1, \ldots, p_m$, l'ensemble des vecteurs de valeurs autorisées D et la fonction de jugement collectif F. Ces décalages n'ayant d'intérêt que pour le spécialiste, nous passerons outre, et de même, nous ne chercherons pas à déterminer dans quelle mesure les enchaînements habiles, mais très informels, de l'article constituent, ou seulement préparent, une démonstration satisfaisante. Il vaut la peine, en revanche, de mettre en exergue un procédé mathématique remarquable dont Guilbaud se sert pour décider si une fonction de jugement collectif F est ou non dictatoriale.

Nous noterons par N la population d'individus dont on agrège les jugements et par 2^N l'ensemble de toutes les parties de cet ensemble. Sous l'hypothèse de systématicité, F peut être associée de manière univoque à un ensemble $\mathcal{E}$ inclus dans 2^N, qui s'interprète comme *l'ensemble des coalitions gagnantes selon* F : pour chaque C appartenant à $\mathcal{E}$, lorsque tous les individus de C donnent la valeur 1 à une proposition p_j de l'agenda, la fonction F donne aussi 1 à p_j. Les propriétés concevables de F se retranscrivent alors en propriétés concevables de $\mathcal{E}$, qui

1. Cet énoncé, dû à Pauly et Van Hees ([2006], Theorem 4, p. 579), est le premier à établir que la systématicité suffit à provoquer la dictature. List et Pettit [2002] montraient seulement qu'elle contredit l'anonymat.

s'avèrent plus faciles à manipuler[1]. Guilbaud parvient justement à son théorème de possibilité en étudiant l'ensemble $\mathcal{E}$ associé à F lorsque l'agenda ne contient que deux formules. C'est, historiquement, la première démonstration de ce genre dans une théorie agrégative au sens large. Beaucoup d'autres vont suivre, d'abord en théorie du choix social, puis en théorie de l'agrégation des jugements. La plus célèbre est une démonstration du théorème d'Arrow qui circule à partir des années 1970 : elle consiste à montrer que, sous les hypothèses qu'il pose, la « fonction de bien-être social » est associée à un ensemble d'« ensembles décisifs » qui forme un *ultrafiltre*[2]. Il aurait été facile à Guilbaud d'obtenir son théorème d'impossibilité du jugement collectif en montrant qu'à partir de trois formules présentes dans l'agenda, l'ensemble $\mathcal{E}$ associé à F devient un ultrafiltre. Ce raisonnement vient d'être détaillé par Eckert et Monjardet [2010][3]. On ne le trouve pas tel quel chez Guilbaud, qui, pour une raison obscure, renonce, quand il attaque le second résultat, au procédé qui lui avait si bien réussi pour le premier ; il manque là de peu un nouveau titre d'inventeur.

En 1963, Arrow interprète Guilbaud à la lumière de son propre travail et de la théorie du choix social naissante, et il lui attribue l'emploi d'une condition venue de cette théorie, la *neutralité*. De toutes les conditions posées sur les préférences individuelles et collectives, celle-ci est la plus proche de la condition de systématicité des jugements. Elle veut que la préférence agrégée ignore la différence de nature entre des options dès lors que la distribution de préférences est préservée pour ces options. Si ceux qui préfèrent A à B sont les mêmes que ceux qui préfèrent C à D, que ceux qui préfèrent B à A sont les mêmes que ceux qui préfèrent D à C, et que le groupe des indifférents soit le même aussi, la préférence collective classera C et D comme elle classe A et B. La condition de neutralité entre dans la théorie du choix social avec un article de May [1952] consacré à la règle de vote majoritaire. Celui-ci porte spécifiquement sur le cas de deux options, où la règle se comporte bien parce qu'elle évite toute intransitivité, et il montre alors facilement qu'elle équivaut à la conjonction de trois propriétés remarquables, dont celle de neutralité. Arrow ([1963], p. 100-103) présente le résultat de possibilité de Guilbaud comme un préalable à celui de May, ce qui est heuristiquement acceptable, mais incorrect dans le détail, puisque les cadres formels et, du coup, les conditions techniques diffèrent : la systématicité n'est pas la neutralité. Curieusement, Arrow néglige le résultat d'impossibilité de Guilbaud, alors qu'en se plaçant au même niveau d'approximation, il pouvait le rapprocher utilement de son propre théorème. De fait, la neutralité implique strictement l'indépendance des options non pertinentes, qui est la condition arrovienne, ce qui veut dire que la dictature découle encore plus facilement à partir de celle-là que de celle-ci. Une telle variante du théorème d'Arrow s'est beaucoup diffusée à partir de la fin des années 1970 et elle est commode à enseigner ; elle

1. Ces propriétés sont notamment : la clôture par intersection (l'intersection de C et C' appartenant à $\mathcal{E}$ est aussi dans $\mathcal{E}$), la clôture par surensemble (si C' contient C qui appartient à $\mathcal{E}$, il est aussi dans $\mathcal{E}$), la cohérence (si C appartient à $\mathcal{E}$, son complémentaire C^c n'y appartient pas), la maximalité (si C n'appartient pas à $\mathcal{E}$, son complémentaire C^c y appartient).

2. Un ultrafiltre est défini par les quatre propriétés de la note précédente. La méthode des ultrafiltres s'est imposée comme procédé démonstratif après l'article de Kirman et Sonderman [1972], qui en fait saisir toute l'importance. Quand la population N est finie, ce qui est le cas où se place Arrow, l'ultrafiltre est engendré par un singleton et il définit donc une dictature.

3. Dans un travail antérieur, Monjardet [2003] exploitait plus classiquement la structure d'ultrafiltre latente chez Guilbaud pour lui attribuer des résultats sur l'agrégation des préférences.

Revue économique – vol. 63, N° 4, juillet 2012, p. 645-658

est en fait le meilleur analogue que la théorie du choix social puisse offrir du second résultat de Guilbaud. Il est fort possible qu'Arrow ait perçu la variante, mais ne l'ait pas mentionnée parce qu'elle pouvait nuire à son théorème en raison même de sa simplicité démonstrative.

Il n'est pas rien qu'Arrow attribue à Guilbaud la condition de neutralité ainsi qu'un résultat qui l'implique, mais ce n'est pas là que se trouve la fine pointe de l'article. Celle-ci échappe entièrement à l'auteur de *Social Choice and Individual Values* : il ne conçoit pas que l'idée de jugement généralise celle de préférence et puisse être le point de départ d'une théorie autre que la sienne. On ne doit pas s'étonner outre mesure d'un malentendu qui survient si près de la publication d'un livre fondamental, car la plupart des lecteurs de Guilbaud y céderont, et il en porte d'ailleurs en partie la responsabilité, car il ne cesse d'hésiter, tout au long de l'article, entre les deux niveaux conceptuels de la préférence et du jugement. Quand il avance vers son premier résultat, il s'occupe, en tout généralité, de questions qui appellent une réponse par oui ou non et qui sont logiquement liées entre elles (p. 85-92 ; *infra*, p. 699-705). L'ensemble de ce passage est remarquablement proche des travaux contemporains. Mais le langage de la préférence lui revient quoi qu'il en ait, de sorte que les « opinions » sont bientôt identifiées à des ordres ABC, BCA, etc. Passant au second résultat, Guilbaud retombe dans la théorie du choix social et ses recettes mathématiques propres (p. 92-99 ; *infra*, p. 706-711). À trop mépriser les formalismes, Guilbaud finit par en utiliser plusieurs à la fois en oubliant qu'ils ont chacun leurs principes et leurs ressources. On conçoit que même des esprits perçants n'aient pas saisi la nouveauté qui se dissimulait sous tant de flottements.

En traitant des ensembles de coalitions gagnantes, puis de l'interprétation d'Arrow, nous sommes tout naturellement passé du deuxième au troisième groupe de contributions, qui concerne la théorie du choix social proprement dite. La dernière rubrique s'étoffe d'une analyse inattendue des *préférences unimodales*, dont Black avait montré en 1948 qu'elles échappaient au paradoxe du vote (p. 61-67 ; *infra*, p. 678-684). Exploitant la combinatoire spéciale de ces préférences, Guilbaud leur donne une représentation graphique avec laquelle il retrouve élégamment la conclusion. Alors que son prédécesseur faisait des hypothèses pour obtenir une représentation géométrique du problème agrégatif, la démonstration graphique de Guilbaud, fondée sur l'algèbre, est complètement générale, et il est dommage qu'elle soit passée inaperçue.

Le bilan de cet innovateur méconnu pourrait se développer à l'intérieur de la même rubrique. Monjardet [2005] a su lire, dans l'article d'*Économie appliquée*, une théorie mathématique du vote qui va plus loin que la découverte de l'effet Condorcet et de sa disparition lorsque les préférences individuelles sont unimodales. En substance, Guilbaud offrirait une solution générale, qui repose sur la notion de médiane, comprise dans un sens abstrait qui englobe celui que la statistique a rendu familier. Nous avons renoncé à commenter ce développement technique, et de même, nous laisserons de côté le passage dans lequel Guilbaud revient, d'une manière qui n'est pas celle d'Arrow, sur la « fonction de bien-être social » qu'on appelle de Bergson-Samuelson (p. 99-109 ; *infra*, p. 712-720). Là se trouvent peut-être les éléments d'une autre contribution négligée à la théorie du choix social. Mais nous en avons dit assez pour inciter le lecteur à se lancer lui-même dans une lecture enrichissante malgré ses difficultés.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

« Biographie de G.-Th. Guilbaud », *Mathématiques et sciences humaines / Mathematics and Social Sciences*, 46 (183), 2008, p. 9-15.

« Publications de G.-Th. Guilbaud », *ibid.*, p. 17-23.

ARROW K.J. [1952], « Le principe de rationalité dans les décisions collectives », *Économie appliquée*, 5, p. 469-484.

Collected Papers of Kenneth J. Arrow, vol. 1. *Social Choice and Justice,* Cambridge (Mass.), The Belknap Press of Harvard University Press, 1983.

BLACK D. [1948], « On the Rationale of Group Decision-Making », *Journal of Political Economy*, 56, p. 23-34.

BLACK D. [1952], *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge, Cambridge University Press.

CRÉPEL P. et GILAIN C. [1989] (dir.), *Condorcet : mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Paris, S.I. Minerve.

DIETRICH F. et LIST C. [2007], « Arrow's Theorem in Judgment Aggregation », *Social Choice and Welfare*, 29, p. 19-33.

DOKOW E. et HOLZMAN R. [2010], « Aggregation of Binary Evaluations with Abstentions », *Journal of Economic Theory*, 145, p. 544-561.

ECKERT D. et MONJARDET B. [2010], *Mathématiques et Sciences humaines* / *Mathematics and Social Sciences*, 48 (189), p. 19-35.

FISHBURN P. et RUBINSTEIN A. [1986], « Algebraic Aggregation Theory », *Journal of Economic Theory*, 38, p. 63-77.

GRANGER G.G. [1955], *Méthodologie économique*, Paris, Presses Universitaires de France.

GRANGER G.G. [1956], *La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, Paris, Presses Universitaires de France, 1956 ; rééd. Paris, Odile Jacob, 1989.

GUILBAUD G.T. [1952], « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Économie appliquée*, 5, p. 501-584. Repris dans GUILBAUD [1968], ch. II. Traductions anglaises : « Theories of the General Interest and the Logical Problem of Aggregation » ; partielle dans *Reader on Mathematical Social Sciences*, UNESCO, Paris, 1966 ; complète dans *Journ@l électronique d'Histoire des probabilités et de la statistique* (www.jehps.net), 4 (1), 2008 (précédée de « Liminary on Guilbaud's 1952 Paper » par B. Monjardet).

GUILBAUD G.T. [1968], *Éléments de la théorie mathématique des jeux*, Monographies de recherche opérationnelle n° 9, Paris, Dunod.

KIRMAN A. et SONDERMAN D. [1972], « Arrow's Theorem, Many Agents, and Invisible Dictators », *Journal of Economic Theory*, 5, p. 267-277.

LASLIER J.F. [2004], *Le vote et la règle majoritaire*, Paris, CNRS Éditions.

LIST C. et PETTIT P. [2002], « Aggregating Sets of Judgments: An Impossibility Result », *Economics and Philosophy*, 18, p. 89-110.

MAY K.O. [1952], « A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority décisions », *Econometrica*, 20, p. 680-684.

MONGIN P. [2003], « L'axiomatisation et les théories économiques », *Revue économique*, 2003, 54, p. 99-138.

MONGIN P. et DIETRICH F. [2010], « Un bilan interprétatif de la théorie de l'agrégation logique », *Revue d'économie politique*, 120, p. 929-972.

MONJARDET B. [2003], « De Condorcet à Arrow *via* Guilbaud, Nakamura et les "jeux simples" », *Mathématiques et Sciences humaines* / *Mathematics and Social Sciences*, 41, n° 163, p. 5-32.

MONJARDET B. [2005], « Social Choice Theory and the Centre de Mathématique Sociale : Some Historical Notes », *Social Choice and Welfare,* 25, p. 433-474.

MONJARDET B. [2012], « G.-Th. Guilbaud et la théorie du choix social », *Économie apliquée*, 65, p. 93-125.

NATAF A. [1948], « Sur la possibilité de construction de certains macromodèles », *Econometrica*, 16, p. 232-244.

NEHRING K. et PUPPE C. [2002], « Strategy-Proof Social Choice on Single-Peaked Domains: Possibility, Impossibility, and the Space Between », *Working Paper*, Department of Economics, University of California, Davis.

PAULY M. et VAN HEES M. [2006], « Logical Constraints on Judgment Aggregation », *Journal of Philosophical Logic*, 35, p. 569-585.

ROUSSEAU J.-J. [1966], *Œuvres complètes*, t. II, Paris, Gallimard, coll. « Bibliothèque de la Pléiade ».

TODHUNTER I. [1865], *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Lagrange* (1865), Cambridge et Londres, MacMillan Co. Rééd. New York, Chelsea Pub Co.

VAN DAAL J. et MERKIES H.Q.M. [1984], *Aggregation in Economic Research*, Dordrecht, Reidel.

WILSON R. [1975], « On the Theory of Aggregation », *Journal of Economic Theory*, 10, p. 89-99.