

## LE PARADOXE D'ALLAIS

### Comment lui rendre sa signification perdue ?

**Philippe Mongin**

**Presses de Sciences Po** | *Revue économique*

**2014/5 - Vol. 65**  
**pages 743 à 779**

**ISSN 0035-2764**

Article disponible en ligne à l'adresse:

-----  
<http://www.cairn.info/revue-economique-2014-5-page-743.htm>  
-----

Pour citer cet article :

-----  
Mongin Philippe, « Le paradoxe d'Allais » Comment lui rendre sa signification perdue ?,  
*Revue économique*, 2014/5 Vol. 65, p. 743-779.  
-----

Distribution électronique Cairn.info pour Presses de Sciences Po.

© Presses de Sciences Po. Tous droits réservés pour tous pays.

La reproduction ou représentation de cet article, notamment par photocopie, n'est autorisée que dans les limites des conditions générales d'utilisation du site ou, le cas échéant, des conditions générales de la licence souscrite par votre établissement. Toute autre reproduction ou représentation, en tout ou partie, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit, est interdite sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, en dehors des cas prévus par la législation en vigueur en France. Il est précisé que son stockage dans une base de données est également interdit.

# Le paradoxe d'Allais

## Comment lui rendre sa signification perdue ?

Philippe Mongin\*

*De tous les problèmes conçus par la théorie de la décision, le paradoxe d'Allais est peut-être celui qui aura suscité l'intérêt le plus persistant. La théorie y a consacré assez de travaux techniques remarquables pour qu'il soit désormais possible à l'histoire et à la philosophie des sciences de l'examiner réflexivement.*

*Dans sa partie historique, l'article restitue le contexte d'apparition du paradoxe – le colloque de Paris, en 1952, auquel assistaient les principaux théoriciens de la décision du moment. L'axiomatique de von Neumann et Morgenstern en 1947 leur avait donné des raisons nouvelles d'approuver l'hypothèse de l'utilité attendue, et le contre-exemple d'Allais visait précisément à ébranler leur conviction. Les questions de la controverse étaient de type normatif, mais elles se perdirent quand le « paradoxe d'Allais » gagna tardivement la célébrité dans les travaux des années 1980. Ceux-ci le traitèrent comme une simple réfutation empirique et ils en firent l'enjeu de « théories de l'utilité non espérée » qu'ils développaient de même sous le seul angle empirique.*

*Dans sa partie philosophique, l'article cherche à évaluer ce déplacement d'interprétation. D'un certain côté, les théoriciens de la décision firent bien de libérer leur travail expérimental des complications du normatif, car ils parvinrent ainsi à des résultats éclairants : l'hypothèse de l'utilité espérée était empiriquement réfutée, la responsabilité principale en revenait à l'axiome d'indépendance de von Neumann-Morgenstern, et l'étape suivante était de transformer adéquatement cet axiome. D'un autre côté, ils eurent tort de négliger un trait fondamental de leur domaine : les comportements observés ne sont informatifs que si les agents sont prêts à les assumer de manière réfléchie, c'est-à-dire à leur prêter une certaine valeur normative. D'après la reconstruction proposée ici, Allais ne voulait faire porter les expériences de choix que sur des sujets rationnels, ou bien sélectionnés au départ, ou bien révélés comme tels par l'expérience. L'article développe ces intuitions en revenant aux travaux des années 1970, aujourd'hui très peu connus, qui, sous l'influence d'Allais, proposèrent des traductions expérimentales de la rationalité, et il invite finalement la théorie de la décision à diversifier ses méthodes en s'inspirant de ces tentatives originales.*

---

\* CNRS et HEC Paris. *Correspondance* : GREGHEC, 1 rue de la Libération, F-78350 Jouy-en-Josas. *Courriel* : mongin@greg-hec.com

Une première version de ce texte a été présentée au Comité national français d'histoire et de philosophie des sciences de l'Académie des sciences (2010), et une seconde, plus développée, à l'Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques (2012), au Sydney Center for the Foundations of Science, au séminaire Phare, au GREQAM et au Department of Philosophy, Bristol University (2013). Nous remercions les participants de leurs remarques instructives. Des remerciements particuliers vont à Mohammed Abdellaoui et à Bertrand Munier pour des discussions éclairantes, à Jean-Sébastien Lenfant, Jean Baccelli et Vincent Eli pour leur lecture attentive du manuscrit, et aux deux rapporteurs de la *Revue économique* pour leurs critiques savantes et constructives. Nous avons bénéficié du soutien de l'Australian National University (ANU) pendant la préparation de ce travail.

## ALLAIS'S PARADOX: HOW TO GIVE IT BACK ITS LOST MEANING?

*Few problems in decision theory have raised more persisting interest than the Allais paradox. It appears that sufficiently many brilliant works have addressed it from within decision theory proper for history and philosophy of science now to enter the stage.*

*In its historical side, the paper recounts the paradox as it arose, i.e., in 1952, at a Paris conference attended by the main decision theorists of the time. They had drawn renewed confidence in expected utility theory (EUT) from the way von Neumann and Morgenstern had axiomatized it in 1947, and Allais devised his puzzle precisely to shaken their confidence. The issues between the two camps were normative, but they became lost in the developments of the 1980s that belatedly brought fame to the « Allais paradox ». These works restricted the paradox to be a straightforward empirical refutation, turning it into a stake of also exclusively empirically oriented non-EU theories.*

*In its philosophical vein, the paper tries to evaluate this shift of interpretation. To an extent, decision theorists were right because their experimental work was thus freed from a major complication and amenable to illuminating results: EUT was empirically refuted, the independence axiom of von Neumann and Morgenstern was the main culprit, and the next theoretical stage was to modify this axiom appropriately. However, they were also wrong in not addressing an essential feature of their field: i.e., that observed behaviour is informative only if agents are prepared to endorse it reflectingly, i.e., to endow it with some normative value. As reconstructed here, Allais meant to reserve choice experiments to rational subjects, who were either selected at the outset, or identified as such by the experimental results. The paper tries to flesh out Allais's intuitions by turning to by now little known works of the 1970s, which under his influence provided experimental renderings of rationality, and it eventually suggests that decision theory might diversify its methods by taking inspiration from these original attempts.*

Classification JEL : B21, B31, B41, C91, D81

## INTRODUCTION

Il n'est pas besoin d'approfondir beaucoup la théorie de la décision pour croiser en chemin le *paradoxe d'Allais*, cette jolie trouvaille de l'économiste français, qui eut plus de retentissement que n'importe laquelle de ses plus vastes constructions<sup>1</sup>. Le paradoxe est dirigé contre l'hypothèse classique voulant que la décision dans l'incertitude obéisse à la règle de l'utilité espérée (ou attendue, nous emploierons les deux expressions indifféremment). Cet enjeu considérable

---

1. L'apport d'Allais à la théorie économique générale aura été longtemps sous-estimé. Il fit l'objet d'une réévaluation progressive qui aboutit, en 1988, à l'octroi du prix de la Banque royale de Suède en sciences économiques. On le trouvera exposé synthétiquement chez Drèze [1989], Grandmont [1989], Munier [1991], [1995] et Tirole [2012], qui rendent hommage à ses innovations, chez Sterdyniak [2011], qui ne nie pas l'originalité, mais conteste la pertinence, et dans les trois recueils de Boiteux, de Montbrial et Munier [1986], Munier [1995], Diemer, Lallement et Munier [2010]. Les travaux spécialisés d'histoire de la pensée économique sont encore peu nombreux, mais on citera ceux de Weintraub [1991], Lenfant [2005] et Béraud [2014], relatifs au *Traité d'économie pure*, et ceux de Prat [1996], [1999], relatifs à *Économie et intérêt* et aux travaux postérieurs sur la monnaie et les cycles.

explique les hésitations qu'il a d'abord suscitées. Découvert en 1952 et publié en 1953, alors que von Neumann et Morgenstern venaient d'offrir un fondement théorique à l'ancienne hypothèse, le paradoxe apparut d'abord aux spécialistes comme une simple curiosité ingénieuse. Mais au bout d'un long délai, grâce à la persévérance de son auteur et d'un petit nombre d'émules, il finit par les intéresser, les préoccuper et, finalement, atteindre son but de paradoxe, qui était d'ébranler leur confiance dans des idées tenues pour évidentes. C'est ainsi qu'il a migré de la périphérie vers le centre de la théorie de la décision. Pour cette discipline aujourd'hui, la règle de l'utilité espérée en appelle d'autres qui la généralisent ou parfois s'opposent à elle, et le paradoxe d'Allais sert aujourd'hui à motiver heuristiquement la transition.

Il ne va pas de soi d'y revenir encore après que tant d'autres l'ont déjà scruté, mais nous n'avons aucune prétention à le développer sur le plan du savoir positif. Ce que nous proposons est une étude historique doublée d'une étude philosophique – l'adjonction demande que l'on accepte, comme nous le faisons, le principe de lier étroitement la philosophie des sciences à leur histoire. Mais l'étude déborde à la longue de ce cadre, car sa dernière partie se fait normative et programmatique : ayant révélé dans le paradoxe un modèle expérimental inattendu, nous le recommanderons aux expérimentateurs d'aujourd'hui qui, pour la plupart, l'ignorent.

La période que nous couvrons historiquement est celle du paradoxe lui-même et des tout premiers travaux qu'il a suscités – elle court approximativement du début des années 1950 à la fin des années 1970. Même à ce point de vue circonscrit, des antécédents se rencontrent. Une première étude, par Mongin [1988], avait été mise en cause par Guala [2000] pour son attachement excessif à la philosophie convenue de l'expérience et de la réfutation. Guala s'était appuyé sur de bons arguments historiques, et il est résulté de cet échange, avec retard, un travail mieux documenté, aux attendus moins sommaires (Mongin [2009]). Le présent article relève de la même veine révisionniste, mais, à la différence du précédent, qui couvrirait largement la théorie de l'utilité attendue, il se limitera au paradoxe d'Allais en développant une thèse plus précise. Aux travaux mentionnés, il faut ajouter l'étude savante de Jallais et Pradier [2005], qui éclaire la première apparition du paradoxe, avec le complément que lui ont donné Jallais, Pradier et Teira [2008].

C'est un fait essentiel, pour un travail réflexif comme celui-ci, que le paradoxe circule chargé d'interprétations ; elles ne seront pas moins importantes à considérer, à supposer même qu'elles se dissocient de lui. Pour la majorité des économistes et la presque totalité des psychologues contemporains, le paradoxe est une *réfutation empirique* de l'hypothèse de l'utilité attendue et, très précisément, de la condition d'indépendance, dite de von Neumann-Morgenstern, qui figure dans la décomposition axiomatique de cette hypothèse. Nous ne rejetterons pas cette interprétation, mais en soulignerons les limites, en rompant ici avec des évidences philosophiques supposées. À la lumière du travail d'Allais en 1952-1953, nous conférerons à son paradoxe un sens *normatif* prioritaire par rapport au sens empirique, puis, nous appuyant sur les travaux de ses premiers successeurs, nous montrerons que le point de vue normatif est, malgré les apparences, compatible avec le travail empirique et même avec une expérimentation précise. Qu'il soit possible de traduire expérimentalement la rationalité individuelle constitue la thèse principale de l'article. Ainsi, l'expérimentateur ne se contenterait plus d'étudier la façon de choisir de sujets quelconques, mais de sujets qu'il suppose rationnels au vu de son expérience même. Les choix qu'il observerait dans de telles conditions donneraient matière non seulement

à des régularités de comportement, mais à des jugements normatifs de sa part, puisque ces choix lui apparaîtraient fondés en raison, donc justifiables et, sous certaines réserves, recommandables. Cette proposition est en rupture avec la méthodologie expérimentale d'aujourd'hui.

L'article se développe en cinq temps. Le premier est un rappel des concepts et enchaînements théoriques dont n'importe quelle interprétation du paradoxe doit tenir compte ; nous lui donnons une forme historique pour préparer la suite. Dans un deuxième temps, nous présentons le paradoxe à la manière convenue d'une réfutation empirique et discutons brièvement le problème d'indétermination (dit aussi de Duhem) qui se pose dans cette perspective. De fait, il ne va pas de soi que l'axiome de von Neumann-Morgenstern doive être incriminé plutôt que d'autres dont l'hypothèse d'utilité espérée a besoin, en particulier celui qui permet de réduire les loteries composées aux loteries simples. Le problème d'indétermination occupait largement le travail précédent, et nous ne faisons ici que le survoler. Dans un troisième temps, nous relisons les premiers travaux d'Allais en 1952-1953 en les situant dans leur contexte d'apparition, et nous y trouvons une idée toute différente de celle que la postérité a retenue. Il tient pour acquis que l'hypothèse de l'utilité attendue ne s'applique pas à l'homme réel et il réserve ses contre-exemples à l'homme rationnel, ce qui revient à diriger contre elle une objection normative. Ses adversaires principaux, Savage et Samuelson, avaient d'eux-mêmes écarté toute prétention empirique et campaient déjà sur le terrain de la rationalité. Ainsi, nous rejetons l'idée commune voulant que l'hypothèse de l'utilité espérée soit apparue d'abord sous la forme empirique et que, les contre-exemples se multipliant, ses défenseurs aient fait retraite vers des propriétés normatives réputées plus avantageuses. Dans un quatrième temps, nous déployons philosophiquement l'interprétation normative du paradoxe, en arrivant à la thèse que la rationalité peut s'inscrire dans une démarche expérimentale. Celle-ci peut se moduler : si Allais préfère sélectionner les sujets rationnels de manière exogène, nous envisageons de repérer les sujets rationnels de manière endogène à l'expérience. Le cinquième temps ramène à l'histoire des idées, car les premiers expérimentalistes adeptes d'Allais, entre la fin des années 1960 et le début des années 1980, se fixèrent précisément sur cette autre possibilité ; leur travail en constitue la meilleure défense. Ils soumettent les choix observés non seulement aux contrôles de routine, mais à un crible spécial de cohérence, portant sur les sujets eux-mêmes plutôt que sur leurs choix. Cette tendance originale s'est perdue sous l'influence ultérieure de la psychologie empirique à la manière de Kahneman et Tversky. La perte est regrettable, et l'article déborde finalement de l'analyse réflexive pour recommander aux praticiens d'aujourd'hui le modèle expérimental disparu.

## RAPPEL DU PARADOXE ET DE SON CONTEXTE THÉORIQUE

Le paradoxe d'Allais renvoie inévitablement au traité de von Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, et plus précisément à son édition de 1947, qui ajoute à celle de 1944 un appendice mathématique portant sur la théorie de l'utilité<sup>2</sup>. Les auteurs y proposent une version mathématisée de

---

2. Leonard ([1995], p. 753) décrit la genèse de cet appendice, dont l'idée revint à Morgenstern et la réalisation technique, on le supposerait, au seul von Neumann.

l'hypothèse de l'utilité espérée ou attendue. Par elle-même, l'hypothèse est ancienne et banale – on la fait d'habitude remonter à Bernoulli et même à Pascal – et la contribution de l'appendice est seulement de la dériver à partir de notions antérieures, c'est-à-dire de la plonger dans une axiomatique<sup>3</sup>.

Von Neumann et Morgenstern se placent dans le cas où les préférences de l'agent portent sur des résultats incertains préalablement affectés de valeurs de probabilité. On rappellera que l'hypothèse s'applique aussi, et plus généralement, au cas où les valeurs de probabilité se dérivent des préférences au lieu d'être données, et ce sera la contribution ultérieure de Savage [1954] que d'axiomatiser cette variante plus avancée. Il n'en sera pas explicitement question ici, mais il faut garder en mémoire que Savage était encore au travail quand Allais présenta son paradoxe et que, du coup, les auteurs de l'époque – et Savage et Allais eux-mêmes – ne différenciaient pas rigoureusement les deux cas que la théorie séparera par la suite avec une clarté entière<sup>4</sup>.

Sous le nom d'*axiomatique de von Neumann-Morgenstern*, on enseigne aujourd'hui un système qui n'est en fait pas celui des auteurs, mais une création collective par d'autres, économistes et mathématiciens, que l'appendice de 1947, écrit obscurément et sans doute hâtivement, avait laissés insatisfaits. Il n'est pas utile d'entrer dans la complexité de ce processus, qui est bien étudié par ailleurs<sup>5</sup>. Il nous importe seulement qu'avec les successeurs de von Neumann et Morgenstern, le travail axiomatique prenne la forme qui deviendra universelle par la suite en théorie de la décision : la relation de préférence est le terme primitif ; la fonction d'utilité, avec sa propriété d'utilité attendue ou toute autre propriété spéciale, est le terme dérivé ; enfin, les axiomes imposés à la première se trouvent impliquer l'existence de la seconde en même temps que son unicité relative. On nomme cette liaison implicite, qui se renforce parfois en équivalence, un *théorème de représentation*.

Parmi toutes les variantes axiomatiques possibles, celle de Friedman et Savage [1952] est la plus transparente de toutes, et elle nous semble aussi correspondre à l'état moyen du savoir quand Allais invente son paradoxe ; nous l'avons donc retenue pour le rappel qui suit (en lui imposant une simplification supplémentaire). Soit  $X = \{x_1, \dots, x_R\}$  l'ensemble des résultats possibles, rangés dans un ordre arbitraire, et  $u = (u(x_1), \dots, u(x_R))$  le vecteur des valeurs d'utilité qui leur sont attribuées. Les options incertaines se représentent par des vecteurs de probabilité sur  $X$ , soit  $p = (p(x_1), \dots, p(x_R))$ ,  $q = (q(x_1), \dots, q(x_R))$ , et ainsi de suite<sup>6</sup>. On appelle ces vecteurs *loteries* par référence aux billets de

3. Au point de vue du logicien, le travail de von Neumann et Morgenstern n'est pas une axiomatisation authentique même s'il l'évoque analogiquement (Mongin [2003]). Mais nous ne reviendrons pas sur la manière ordinaire de le qualifier.

4. Savage diffusa une première forme de son axiomatique en 1952 lors du colloque de Paris, et il est probable qu'Allais en prit connaissance de cette manière. D'après la bibliographie de Fishburn et Wakker [1995], les publications les plus anciennes de ce travail de Savage ne remontent pas en deçà de 1952. Son article important de 1951 propose le critère du regret minimal et non pas encore celui de l'utilité attendue.

5. Les successeurs de von Neumann et Morgenstern sont Marschak et Samuelson, du côté des économistes, Rubin, Herstein et Milnor, du côté des mathématiciens. Chacun y va de son système, et il faudra du temps pour ordonner toutes ces tentatives. Fishburn et Wakker [1995] les comparent en grand détail.

6. Sous l'hypothèse d'un ensemble fini de résultats, la notion générale de *mesure* de probabilité se simplifie, et il ne sera question ici que de *vecteurs* de probabilité (c'est-à-dire de vecteurs à composantes non négatives et ayant pour somme 1).

loterie qui en fournissent un modèle concret, et on désigne par  $L$  leur ensemble. L'hypothèse de l'utilité espérée s'écrit alors : pour tous  $p, q \in L$ ,

$$(*) p R q \text{ ssi } \sum p(x_i) u(x_i) \geq \sum q(x_i) u(x_i),$$

la partie gauche se lisant «  $p$  est faiblement préféré à  $q$  ». Comme le veut la définition habituelle, la relation de préférence faible notée  $R$  se décompose en une sous-relation de préférence stricte (notée  $P$ ) et une sous-relation d'indifférence (notée  $I$ ).

La relation  $R$  posée sur  $L$  vérifie trois conditions axiomatiques :

(A1) Elle est un *préordre large*, c'est-à-dire qu'elle est transitive et totale.

(A2) Elle est *continue*, ce qui veut dire qu'une loterie  $r$  dans un intervalle de préférence stricte compris entre deux autres  $p$  et  $q$  est équivalente à une loterie ayant ces loteries  $p$  et  $q$  pour résultats et non dégénérée, c'est-à-dire attribuant des probabilités positives à  $p$  et à  $q$ . Symboliquement : si  $p P r P q$ , alors il existe  $\alpha$  strictement compris entre 0 et 1 tel que  $r I \alpha p + (1 - \alpha)q$ .

(A3) Elle satisfait la propriété d'*indépendance* dite de *von Neumann-Morgenstern* : si  $p$  est faiblement préférée à  $q$ , et que  $r$  soit une loterie quelconque, la loterie qui donne  $p$  avec probabilité  $\alpha$  et  $r$  avec probabilité  $1 - \alpha$ , est faiblement préférée à la loterie qui donne  $q$  avec probabilité  $\alpha$  et  $r$  avec probabilité  $1 - \alpha$ , et réciproquement. Symboliquement, pour tout  $\alpha$  strictement compris entre 0 et 1 :  $p R q$  si et seulement si  $\alpha p + (1 - \alpha)r R \alpha q + (1 - \alpha)r$ .

Les deux dernières conditions font intervenir des *combinaisons convexes* des loteries initiales, soit  $\alpha p + (1 - \alpha)q$  dans (A2) et  $\alpha p + (1 - \alpha)r$  et  $\alpha q + (1 - \alpha)r$  dans (A3). Ces objets mathématiques sont déjà contenus dans l'ensemble des loteries  $L$  (qui est fermé par combinaisons convexes). L'interprétation qui les accompagne en fait des *loteries composées*, c'est-à-dire des loteries ayant d'autres loteries pour résultats, par opposition aux *loteries simples* initialement définies, mais il ne s'agit précisément que d'une interprétation, car les nouveaux objets sont de la même nature que les objets initiaux  $p, q, r$ . Par exemple, si  $p$  est la loterie qui donne  $x$  avec probabilité  $\frac{1}{4}$  et  $y$  avec probabilité  $\frac{3}{4}$ ,  $q$  est la loterie qui donne  $x$  avec probabilité  $\frac{3}{4}$  et  $y$  avec probabilité  $\frac{1}{4}$ , et  $\alpha$  vaut  $\frac{1}{2}$ , on obtient pour  $\alpha p + (1 - \alpha)q$  la loterie qui donne  $x$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et  $y$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , donc un vecteur de probabilité comparable aux précédents.

Il apparaît donc un écart de l'interprétation au formalisme, qui n'est pas assez expressif pour rendre l'idée d'une hiérarchie de loteries, et cet écart représente à la fois un avantage et un inconvénient pour le théoricien de la décision. D'une part, celui-ci profitera de la simplicité opératoire de l'ensemble  $L$  : il est donné en une fois, sans qu'on ait à construire les loteries composées à partir des loteries simples, et ses éléments – les vecteurs de probabilité – sont mathématiquement familiers. Mais, d'autre part, le théoricien s'autorise des identifications que les agents ne sont peut-être pas en mesure ou désireux de faire. Ils peuvent buter sur les calculs de probabilités composées, et même s'ils ont toute facilité à cet égard, ils peuvent considérer qu'une loterie composée ne coïncide pas, suivant leurs préférences, avec la loterie simple que le calcul lui associe. Il faut donc tenir compte d'une autre condition que (A1), (A2) et (A3), même si elle ne prend pas la forme d'un axiome supplémentaire. Nous parlerons du *principe d'identification des loteries* (sous-entendant : *simples et composées*). Dans la théorie de décision ultérieure, la terminologie courante est « réduction des loteries composées aux

loteries simples », mais elle peut faire oublier que l'identification joue de deux manières : non seulement les loteries composées s'écrivent comme des loteries simples, mais, s'il est besoin, les loteries simples s'écrivent comme des loteries composées<sup>7</sup>.

L'axiomatique de von Neumann-Morgenstern étant donnée d'une façon ou d'une autre, il lui correspond un théorème de représentation, dit encore *de von Neumann-Morgenstern*, qui raccorde la préférence à la fonction d'utilité espérée. Dans le cas d'espèce, ce théorème affirme que R satisfait aux conditions (A1), (A2) et (A3) si et seulement si l'équivalence (\*) a lieu. Il ajoute que la fonction  $u$  vérifiant cette équivalence est unique à l'origine et à l'unité de mesure près, mais nous n'aurons besoin que du résultat d'existence.

L'hypothèse de l'utilité espérée a, par elle-même, une évidence immédiate, que les conditions (A1), (A2) et (A3), faciles et naturelles, viennent consolider. Or, voici le contre-exemple mis au point par Allais en 1952 et publié par lui en 1953. Soit deux choix à effectuer, d'abord entre  $p_1$  et  $q_1$ , puis entre  $p_2$  et  $q_2$  (les montants indiqués sont en millions de francs) :

$p_1$ : 100 avec prob 1	$p_2$ : 100 avec prob 0,11 0 avec prob 0,89
$q_1$ : 500 avec prob 0,10 100 avec prob 0,89 0 avec prob 0,01	$q_2$ : 500 avec prob 0,10 0 avec prob 0,90

Il y a quatre couples de choix, ou solutions, possibles, dont deux respectent l'hypothèse de l'utilité espérée, soit  $(p_1, p_2)$  et  $(q_1, q_2)$ , et deux la violent, soit  $(p_1, q_2)$  et  $(q_1, p_2)$ . On vérifie ces affirmations en posant les inégalités algébriques qui, d'après la formule (\*), résultent des comparaisons de préférence. Pour qu'un couple soit compatible avec l'hypothèse de l'utilité espérée, il faut et il suffit que ces inégalités algébriques soient elles-mêmes compatibles. Par exemple, avec  $(p_1, q_2)$ , les comparaisons de préférence sont  $p_1 P q_1$  et  $q_2 P p_2$ , et elles se traduisent par deux inégalités qui se contredisent :

$$u(100) > 0,10 u(500) + 0,01 u(0) + 0,89 u(100)$$

et

$$0,11 u(100) + 0,89 u(0) < 0,10 u(500) + 0,90 u(0).$$

Donc  $(p_1, q_2)$  viole l'hypothèse de l'utilité espérée. Il en va de même de  $(p_2, q_1)$ , alors que  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$  sont compatibles avec elle.

Ce raisonnement suppose que les *choix* de l'individu, tels que l'observateur les consigne, reflètent effectivement ses *préférences*, qui font spécifiquement l'objet de l'axiomatisation. Cette hypothèse correspond à la sémantique ordinaire des préférences en économie, celle qu'on nomme des préférences révélées,

7. Friedman et Savage ([1952], p. 467) font allusion au principe dans un seul passage : « A very important assumption is implicit in the structure thus far defined, namely, that preferences of the person in uncertain situations to which probability applies are governed solely by the probabilities attached to each possible income ». Les autres successeurs de von Neumann et Morgenstern inscrivent de même le principe dans la « structure », à l'exception notable de Samuelson [1952a] et [1952b] : celui-ci fait la construction explicite des loteries composées, avant de poser, tout aussi explicitement, qu'elles se réduisent à des loteries simples.

et ni Allais, ni ses successeurs, ne la jugent problématique, au point qu'ils ne l'évoquent même pas. Dans ce travail circonscrit, nous la tenons pour acquise malgré les difficultés de fond qu'elle soulève.

Allais [1953a] et [1953b] soutient que des individus très prudents choisiront  $p_1$  et  $q_2$ , et il produit des raisonnements divers en faveur de cette affirmation. Le mot « paradoxe », apparu dans une phase ultérieure, vient de ce que le contre-exemple heurte un état de l'opinion – *doxa* – que l'on suppose favorable à l'utilité espérée. Il ne faut pas chercher au mot de sens plus profond. La théorie de la décision a parfois mis en évidence des paradoxes plus authentiques, en ceci qu'ils mettaient en cause non pas une opinion générale du sens commun, mais une de ses catégories de base<sup>8</sup>.

Tel qu'on vient de le formuler, le contre-exemple d'Allais porte sur l'hypothèse de l'utilité espérée prise comme un tout, et non pas encore sur une de ses conditions en particulier. Cependant, Allais dit en substance qu'il porte sur l'axiome (A3) du théorème de von Neumann-Morgenstern. On peut reconstituer son raisonnement ainsi. Soit deux autres choix de l'agent, entre  $p'_1$  et  $q'_1$ , puis entre  $p_2$  et  $q'_2$ , qui font intervenir parmi certains résultats une loterie auxiliaire  $l$  :

$l$ : 500 avec prob 10/11 0 avec prob 1/11			
$p'_1$ :	100 avec prob 0,11 100 avec prob 0,89	$p_2$ :	100 avec prob 0,11 0 avec prob 0,89
$q'_1$ :	$l$ avec prob 0,11 100 avec prob 0,89	$q'_2$ :	$l$ avec prob 0,11 0 avec prob 0,89

Si l'on admet l'identité des deux nouveaux problèmes de choix avec les deux précédents, les comparaisons de préférence deviennent  $p'_1 P q'_1$  et  $q'_2 P p_2$ , et il apparaît que la violation porte sur (A3). Supposons en effet que cette condition s'applique. Elle permet de transformer  $p'_1 P q'_1$  en la comparaison 100 P  $l$ , et de transformer  $q'_2 P p_2$  en la comparaison opposée  $l P$  100. (En vertu de (A3), on peut ignorer chaque fois le résultat commun, soit 100 dans un cas et 0 dans l'autre.) Or, l'asymétrie de la préférence stricte, qui est logiquement contenue dans (A1), semble inattaquable ; il faut donc que (A3) soit violée.

Le raisonnement qui fait passer de  $q_1$  et  $q_2$  à  $q'_1$  et  $q'_2$  repose sur un calcul de probabilités composées, et de même la transformation de  $p_1$  en  $p'_1$  (bien que le calcul soit trivial dans ce cas). On retrouve à ce point le *principe d'identification des loteries*. Allais ne le mentionne nulle part, mais il semble bien le tenir pour acquis lorsqu'il avance que le choix de  $p_1$  et  $q_2$  est le fait d'hommes « tout à fait au courant du calcul des probabilités » ([1953a], p. 524). Cette manière très indirecte d'en appeler au principe est conforme à l'époque. Il lui est aussi conforme qu'Allais ne discerne pas entièrement la cible polémique, puisqu'il parle du « principe d'indépendance de Savage » (*ibid.*, p. 525-527), alors l'indépendance appartient en propre au système de von Neumann et Morgenstern, et non pas à celui que Savage développait alors, distinctement de sa collaboration avec Friedman. Dans le passage suivant, Allais (1953a, p. 528-530) conteste le « principe de

8. Le paradoxe de Newcomb est de cette espèce plus subtile. Jallais et Pradier [2005] datent du recueil d'Allais et Hagen en 1979 la première utilisation systématique du mot « paradoxe » pour désigner le contre-exemple de 1952.

substitution » de Samuelson, qui est équivalent à (A3), mais à l'aide d'un autre contre-exemple que la postérité n'a pas retenu. Celle-ci a été bien avisée d'ignorer ces flottements et de considérer que le paradoxe était en fait dirigé contre (A3).

Nous venons de résumer le paradoxe d'Allais et son contexte théorique d'une manière qui se voulait historiquement précise, mais aussi banale et neutre, pour être compatible tant avec l'interprétation convenue (section 3) qu'avec celle qui ressortira ensuite (section 4).

## CE QU'EST DEVENU LE PARADOXE : UNE RÉFUTATION EMPIRIQUE

Pour la majorité des spécialistes d'aujourd'hui, le paradoxe d'Allais a donné lieu à des tests, au sens de la méthode expérimentale, et ceux-ci ont été suffisamment nombreux et convergents pour qu'on puisse parler à son sujet d'une *réfutation empirique* de l'hypothèse d'utilité espérée et, plus précisément, de la condition d'indépendance de von Neumann-Morgenstern. Sans doute, les spécialistes en question reconnaîtraient-ils qu'au stade de l'invention, en 1952-1953, le contre-exemple d'Allais ne présentait pas les caractères scientifiques voulus par cette interprétation ; il n'était alors qu'une expérience de pensée ; mais il contenait en puissance le traitement plus rigoureux à venir, de sorte qu'il est rétrospectivement permis de le lui attribuer. C'est ainsi que, passé un certain point dans l'histoire de la théorie de la décision, celle-ci a le plus souvent présenté les choix du paradoxe comme un phénomène empirique, porteur en outre d'une réfutation univoque<sup>9</sup>.

Nous parcourrons sommairement les résultats qui motivent cette interprétation. Allais lui-même se lancera très vite dans un genre d'expérience. Après avoir mis en circulation le paradoxe en 1952, dans les circonstances sur lesquelles nous reviendrons, il entreprend, dès la même année, un « sondage » – c'est l'expression qu'il emploie – portant sur des individus réels. Des années durant, il se contentera de faire allusion à ce travail sans en exposer les résultats, si ce n'est pour dire qu'ils appuient sa position critique à l'égard de l'utilité espérée. Ce n'est qu'en 1979, à l'intérieur d'une somme collective préparée avec son disciple Hagen, *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, qu'il fournira les explications suivantes<sup>10</sup>.

En 1952, il avait diffusé un questionnaire par la voie postale auprès de correspondants choisis, et il l'avait soumis, mais alors en version abrégée, aux participants d'un séminaire qu'il dirigeait. Parmi les réponses obtenues, il en avait retenu 101, dont 52 de la première source et 49 de la seconde, aux fins d'une analyse statistique ultérieure. Sur le moment, Allais se contenta de publier son questionnaire en ajournant le traitement des réponses<sup>11</sup>. Il ne put y procéder que

9. Les revues de littérature de Schoemaker [1982], Machina [1987], Camerer [1995] et Starmer [2000] présentent ainsi le paradoxe, et de même les synthèses disponibles de l'œuvre d'Allais (par exemple, Grandmont [1989], p. 31-32, et Munier [1991], p. 191-194).

10. Allais [1979], p. 447-449.

11. Allais [1953a], p. 55-73. Le questionnaire est résumé en anglais dans l'ouvrage d'Allais et Hagen ([1979], p. 612-614).

bien plus tard et encore de manière telle qu'au moment où il s'explique, en 1979, il n'offre que des résultats partiels<sup>12</sup>. Rien de plus ne filtrera par la suite.

Le questionnaire incluait sans doute le paradoxe et d'autres contre-exemples, mais il ne mettait pas l'accent sur eux. Son objet principal était d'identifier les fonctions d'utilité des sujets – leur nature exacte faisant l'objet d'un désaccord supplémentaire avec l'école de von Neumann et Morgenstern. En effet, bien loin de limiter ses critiques à la condition d'indépendance, Allais s'est toujours préoccupé d'établir que la fonction  $u$  de la relation (\*), telle que l'axiomatique précédente l'implique, ne satisfait pas aux propriétés de mesurabilité qu'on attend d'une fonction d'utilité. Cette partie moins célèbre de la controverse est essentielle à sa position théorique, mais elle est trop complexe pour être exposée en même temps que les rebondissements du paradoxe<sup>13</sup>.

Connaissant l'orientation générale du questionnaire, on ne s'étonnera pas entièrement que le compte rendu sélectif des réponses, en 1979, fasse très peu de place aux paradoxes et autres contre-exemples. De fait, Allais ne leur consacre qu'une simple note d'une douzaine de lignes<sup>14</sup>. Dans le cas précis du paradoxe, les violations de l'utilité attendue s'élevaient à 46 %, ce qui fait une proportion moindre que pour d'autres contre-exemples, mais Allais ne poursuit malheureusement pas l'intéressante comparaison.

Le « sondage » est resté célèbre à cause de sa date précoce, qui lui assure une place dans l'histoire de l'économie expérimentale, mais il est difficile d'y voir un prototype satisfaisant de ce qu'elle deviendra. L'échantillon n'obéissait pas à un principe rigoureux de sélection, les deux groupes qui le composaient ne répondirent pas aux mêmes questions exactement, et celles-ci étaient sans doute trop théoriques et distantes des choix véritables, si l'on excepte les quelques-unes inspirées par les contre-exemples<sup>15</sup>.

Les premières expériences rigoureuses qu'ils aient motivées ne débutèrent qu'à la fin des années 1960, et elles ne se diversifièrent que dans le courant des années 1970, ce qui frappe comme singulièrement tardif. La période qui sépare l'invention du paradoxe et son premier traitement systématique vit en effet surgir des recherches expérimentales assez nombreuses sur la décision, y compris dans le cas du risque et de l'incertitude. Quelques-unes avaient même précédé l'apparition du paradoxe<sup>16</sup>. Il faut dire que ces travaux émanaient avant tout de psychologues, qui étudiaient les règles de décision en négligeant leur décomposition axiomatique, à la différence des économistes qui faisaient le public principal d'Allais. Il se trouve aussi que la méthodologie statistique de l'époque privilégiait la mesure des grandeurs, notamment des fonctions d'utilité, même quand l'objectif était de confirmer ou d'infirmer une hypothèse abstraite. On peut s'expliquer ainsi qu'Edwards ([1954], p. 394) – l'un des psychologues de la

12. « *Selected Findings of the 1952 Experiment* », Appendix C, *op. cit.*

13. En substance, Allais juge que la seule fonction d'utilité qui convienne mesure l'intensité des satisfactions procurées par des options certaines et que celle que von Neumann et Morgenstern déduisent de leur axiomatique ne répond pas à cette exigence. Nous renvoyons le lecteur aux explications détaillées de Fishburn [1989], Bouyssou et Vansnick [1990] et Munier [1995]. Hey [1991] et Mongin [1997] résument la question.

14. *Ibid.*, p. 636.

15. Voir, par exemple, la critique de Hey ([1991], p. 72-75).

16. Schoemaker [1982] recense les exemples anciens relatifs à l'utilité espérée. Le premier du genre, celui de Mosteller et Nogee [1951], précède nettement le paradoxe d'Allais. On attribue parfois l'antériorité à Preston et Barrata [1948], mais leur travail se rattache imparfaitement à l'utilité espérée.

décision les plus en vue et l'auteur de nombreuses expériences sur les choix – ait pu disqualifier le questionnaire d'Allais comme inutilisable<sup>17</sup>. Finalement, les contre-exemples directs, comme le paradoxe, restent longtemps l'apanage des auteurs théoriques, prompts à les disséquer dans tel ou tel but démonstratif<sup>18</sup>.

Cinq études remarquables – par MacCrimmon [1968], Moskowitz [1974], Slovic et Tversky [1974], Kahneman et Tversky [1979] et MacCrimmon et Larsson [1979] – vont donner au paradoxe d'Allais son statut actuel de résultat expérimental. Les trois premières impliquent des populations de 30 à 50 sujets, la dernière en a plus (jusqu'à 72), et l'avant-dernière en a moins (soit 19)<sup>19</sup>. À chaque reprise, un double problème de choix est posé, qui est tantôt celui d'Allais (chez Slovic et Tversky), tantôt une variante qui préserve les probabilités, mais modifie les lots (chez Moskowitz), tantôt une variante qui modifie les deux composantes (chez Kahneman et Tversky), tantôt une variante en fait plus éloignée (chez MacCrimmon). Dans l'étude la plus approfondie malgré son petit nombre de sujets, celle de MacCrimmon et Larsson, le paradoxe reçoit une définition algébrique fondée sur des paramètres de probabilité et de lot qui varient sur certains intervalles, et les données sont recueillies pour différentes valeurs prises dans ces intervalles. Les pourcentages de violation de l'utilité espérée se répartissent, d'un auteur à l'autre, de 27 à 61 %. Ce dernier taux apparaît chez Kahneman et Tversky pour des valeurs numériques habilement calibrées, et l'on peut considérer qu'il est moins représentatif que les autres taux, lesquels s'étagent entre 27 % et 42 %, y compris dans l'étude plus générale de MacCrimmon et Larsson ([1979], p. 366-367)<sup>20</sup>.

Ainsi, le paradoxe aura été reproduit de deux manières, soit à l'identique sur des populations et dans des circonstances différentes, soit en étant soumis à des variantes numériques, et ces deux genres de réplique lui confèrent une solidité empirique peu discutable. À l'étape ultérieure, on dégagera les *caractères systématiques* de ces expériences, de manière à subsumer le paradoxe sous une ou plusieurs régularités empiriques. Un premier caractère se manifeste à l'observation : les sujets qui contreviennent à l'utilité attendue se rallient à l'une des deux violations possibles en négligeant l'autre ; c'est ainsi que, dans les expériences portant

17. Edwards est, avant Kahneman et Tversky, le principal représentant de la psychologie expérimentale de la décision. Il rejetait l'hypothèse de l'utilité espérée, mais pour d'autres raisons théoriques et expérimentales que celles d'Allais. La différence de vues est manifeste d'après ses articles de 1954 et de 1962.

18. Il en va ainsi chez Savage ([1954-1972], p. 101-104), que reprennent Luce et Raiffa ([1957], p. 25) et, plus longuement, Raiffa ([1968], p. 80-86). L'annexe III détaille la réponse de Savage au paradoxe.

19. Les sujets de ces expériences sont des étudiants, sauf chez MacCrimmon [1968] qui a pu interroger des hommes d'affaires. Un des premiers articles sur le paradoxe d'Allais, dû à Morrison [1967], est parfois cité à tort comme une contribution expérimentale.

20. Kahneman et Tversky ([1979], p. 265-266) proposent l'exemple suivant (l'unité monétaire est le shekel) :

$p_1$ :	2 400 avec prob 1	$p_2$ :	2 400 avec prob 0,34 0 avec prob 0,66
$q_1$ :	2 500 avec prob 0,33 2 400 avec prob 0,66 0 avec prob 0,01	$q_2$ :	2 500 avec prob 0,33 0 avec prob 0,67

Les sujets choisissent  $p_1$  à 82 % et  $q_2$  à 83 %, avec une intersection entre les deux groupes correspondant à 61 % de l'effectif.

sur les valeurs d'Allais, ils choisissent presque toujours  $(p_1, q_2)$  au lieu de  $(q_1, p_2)$ . La première littérature semble curieusement négliger cette leçon presque immédiate du paradoxe ; par la suite, Conlisk [1989] y reviendra en le croisant avec d'autres résultats. Grâce aux variations paramétriques, MacCrimmon et Larsson ont découvert d'autres caractères moins apparents. D'une part, les violations ne dépendent pas de la valeur monétaire absolue des lots, mais de leurs valeurs monétaires relatives, suivant une règle donnée. D'autre part, elles subsistent quand disparaît la loterie certaine –  $p_1$  dans le problème initial – au profit de loteries incertaines d'un certain type.

MacCrimmon et Larsson parlent d'*effet de conséquence commune* pour définir la classe de leurs variantes, et cette expression désigne du même coup une régularité empirique à laquelle on peut rattacher le paradoxe<sup>21</sup>. La théorie de la décision a conservé les mêmes termes tout en leur donnant une signification un peu différente, qui tient compte de travaux ultérieurs. Ce qu'on nomme aujourd'hui effet de conséquence commune fait intervenir les choix de loteries suivants :

$p_1 : x$ avec prob $p$ , P avec prob $1 - p$	$p_2 : x$ avec prob $p$ , R avec prob $1 - p$
$q_1 : Q$ avec prob $p$ , P avec prob $1 - p$	$q_2 : Q$ avec prob $p$ , R avec prob $1 - p$

sachant que  $x$  est un montant certain qui est inférieur au meilleur montant de P et supérieur à son plus mauvais montant, et que P est dans une certaine relation de *dominance stochastique* avec R<sup>22</sup>. On constate alors  $p_1 P q_1$  et  $q_2 P p_2$ , ce qui contrevient à l'utilité espérée. Le contre-exemple historique se retrouve en posant  $x = 1$  million,  $P = 1$  million avec probabilité 1,  $Q = 1$ ,  $R = 0$  avec probabilité 1. Ces valeurs particulières transforment donc en loteries certaines P et  $p_1$  alors que rien n'oblige qu'il en soit ainsi. On n'omettra pas de remarquer que la transcription repose entièrement sur le principe d'identification des loteries.

En quête aussi de traits systématiques, Kahneman et Tversky débouchent sur la conclusion différente que le paradoxe obéit à un *effet de certitude* ([1979], p. 245) ; en d'autres termes, le fait que  $p_1$  soit une loterie certaine serait une explication importante des choix observés. Le diagnostic a une force d'évidence indiscutable, que MacCrimmon et Larsson reconnaissent d'ailleurs, et il serait appréciable de le mettre en balance avec celui qui invoque l'effet de conséquence commune. Malheureusement, les deux effets se comparent mal parce qu'ils n'atteignent pas au même degré d'explicitation théorique. Alors que l'effet de conséquence commune a une définition algébrique précise, l'effet de certitude ne donne lieu qu'à cette considération purement qualitative : la « surpondération des résultats qui s'obtiennent de manière certaine relativement aux résultats qui ne sont que probables », comme l'écrivent ailleurs Tversky et Kahneman ([1986], S265)<sup>23</sup>. Pareille définition est difficilement compatible avec la méthode de variations réglées qui a permis de dégager l'effet de conséquence commune. Toutefois, les deux psychologues examinent d'autres couples de problèmes de choix,

21. « Conséquence » (*consequence*) est ici un autre mot pour « résultat » (*outcome*).

22. On dit que la loterie P domine stochastiquement la loterie R si, pour tout gain possible, la probabilité d'obtenir au moins ce gain est au moins aussi grande avec P qu'avec R. La définition de l'effet de conséquence commune est ici reprise de Machina [1983], [1987].

23. L'article de Kahneman et Tversky en 1979 se contente de mentionner l'effet de certitude sans le définir.

structurellement éloignés du paradoxe et dans lesquels une loterie certaine figure toujours, et ils obtiennent pour ces expériences des taux de violation de l'utilité espérée qui sont considérables. On peut alors conclure avec eux que l'effet de certitude a une réalité empirique. À défaut de les équilibrer quantitativement, la théorie peut faire coexister deux effets qui ne se contredisent pas logiquement, et la meilleure explication du paradoxe d'Allais, vu comme phénomène empirique, nous semble être précisément celle-ci : *il est au carrefour de l'effet de certitude et de l'effet de conséquence commune*<sup>24</sup>.

Bien que la célébrité du paradoxe oblitère ce fait historique, un autre contre-exemple brillant avait surgi sous la plume d'Allais en 1952-1953. Avec certaines modifications, ce contre-exemple est à son tour passé au stade de la généralité empirique pendant la première période expérimentale. Il mettait en scène une violation de l'utilité attendue qui survient lorsqu'un des deux problèmes de choix se déduit de l'autre par une réduction homothétique des valeurs de probabilité allant aux meilleurs lots. MacCrimmon et Larsson ([1979], p. 350) ont aussi donné forme algébrique au phénomène, qu'ils appellent *effet de rapport commun*, et, comme précédemment, ils l'étudient pour différentes valeurs paramétriques. Il se définit ainsi dans la théorie actuelle. On considère les choix de loteries entre  $p_1$  et  $q_1$ , et entre  $p_2$  et  $q_2$  :

$p_1 : x$ avec prob $p$ , 0 avec prob $1 - p$	$p_2 : x$ avec prob $\alpha p$ , 0 avec prob $1 - \alpha p$
$q_1 : y$ avec prob $q$ , 0 avec prob $1 - q$	$q_2 : y$ avec prob $\alpha q$ , 0 avec prob $1 - \alpha q$

sachant que  $p > q$  et  $x < y$ , et que le facteur d'homothétie  $\alpha$  est compris entre 0 et 1. On constate alors  $p_1 \succ q_1$  et  $q_2 \succ p_2$ , ce qui contrevient à l'hypothèse d'utilité attendue<sup>25</sup>. Les nombreuses études qui ont porté sur cet effet, y compris déjà celle de MacCrimmon et Larsson ([1979], p. 359), manifestent des taux de violation nettement plus élevés que pour celui de conséquence commune. Elles reposent en général sur la restriction paramétrique  $p = 1$ , ce qui revient à impliquer l'effet de certitude dans le test, avec la conséquence attendue qu'il renforce les violations.

La philosophie des sciences empiriques ne traiterait pas une expérience comme réfutatrice si elle n'avait pas été répliquée, non seulement à l'identique, mais suivant des variantes programmées, et si le paradoxe ne vérifiait pas cette condition chez Allais lui-même, on voit qu'il a fini par s'y conformer. Quant à interpréter la réfutation empirique par rapport à l'indépendance de von Neumann-Morgenstern, c'est faire un pas de plus, qui revient à trancher d'un *problème d'indétermination* logiquement comparable à ceux que Duhem illustrait dans *La théorie physique* et auxquels il a laissé son nom<sup>26</sup>. Or même si elle ne l'a pas

24. Les vues des contemporains peuvent être plus tranchées. Par exemple, Machina ([1983], [1987]) range le paradoxe d'Allais sous l'effet de conséquence commune sans mentionner l'effet de certitude, alors que Munier ([1991], [2011]) privilégie nettement celui-ci. Les discussions ou expériences récentes visent surtout l'effet de certitude ; voir, parmi d'autres exemples, Weber [2008] et Andreoni et Sprenger [2009].

25. Machina [1983], [1987] définit semblablement l'effet de rapport commun. Le contre-exemple originel d'Allais ([1952], p. 316-317 et [1953b], p. 528-529) obéissait à une structure en fait plus complexe qui, à notre connaissance, n'a pas fait l'objet d'une recherche expérimentale.

26. P. Duhem, *La théorie physique. Son objet – sa structure* (1906-1914). On parle de *problème de Duhem* pour désigner le problème de choix qui découle du caractère logiquement indéterminé de la réfutation, mais on dit souvent aussi *problème de Duhem-Quine*, en impliquant l'autre philosophe

toujours considérée en détail, la théorie de la décision a toujours pris en compte l'éventualité que les agents n'identifient pas les loteries simples et composées, ce qui, dans le cas du paradoxe, interdirait la transcription de  $q_1, q_2$  en  $q'_1, q'_2$  et forcerait à lui trouver de nouvelles explications.

Comme l'avaient souligné les premiers auteurs, les jeux de hasard procurent un plaisir spécifique dans lequel intervient la forme concrète des loteries. Une partie de poker à plusieurs enchères adopte la forme d'une loterie composée en plusieurs étapes, et aux yeux des joueurs, celle-ci est évidemment préférable à sa forme réduite. Face à cette objection, la théorie pouvait se satisfaire d'une *réserve d'applicabilité* : il suffisait de ne pas la faire valoir pour certaines circonstances ludiques ou assimilées. C'est la solution d'Ellsberg [1954] et de Luce et Raiffa ([1957], p. 26), et sans doute aussi, quoique implicitement, de von Neumann et Morgenstern déjà<sup>27</sup>. En se fixant sur le jeu et sur le plaisir qu'il procure, ces auteurs n'abordaient pas frontalement la question, bien plus vaste, des préférences qui peuvent s'exprimer sur la forme concrète des loteries. On concevrait que des investisseurs financiers manifestent de telles préférences non moins que des joueurs, et que celles-ci puissent aller dans la direction opposée, la forme réduite facilitant l'évaluation des rendements.

Le principe d'identification des loteries soulève bien d'autres difficultés encore. Une préférence entre les deux formes d'une loterie n'indique par elle-même ni que l'agent perçoive l'identité, ni qu'il ne la perçoive pas. Les vérifications empiriques doivent porter en premier lieu sur ce point, qui implique le phénomène aujourd'hui très bien documenté des résistances au calcul des probabilités. Il nous semble affecter particulièrement les contre-exemples d'Allais. En exposant le principe, nous avons souligné que l'identification des loteries jouait dans les deux sens ; or celui qui fait aller d'une loterie simple à sa forme composée paraît plus difficile que l'autre et c'est précisément le sens dont les contre-exemples ont besoin si l'on veut mettre en cause l'indépendance. Enfin – mais cette réserve a fait encore moins de chemin que la précédente –, les agents peuvent douter que les tirages successifs des loteries réalisent l'hypothèse d'indépendance stochastique qui justifie de calculer multiplicativement les probabilités composées. Dans certains cas, ces doutes seront fondés, car les phénomènes aléatoires qui sous-tendent les loteries peuvent être liés par des causes communes<sup>28</sup>.

Il aura fallu attendre le tournant des années 1980 et 1990 pour que la théorie de la décision attaque directement le problème des loteries composées. La première étape, facile, aura été de redéfinir les objets de préférence dans l'axiomatique de von Neumann-Morgenstern. Samuelson ([1952a] et [1952b]), puis Luce et Raiffa ([1957], ch. 2), avaient ouvert la voie en construisant explicitement les loteries composées à partir des loteries simples prises comme données. Il leur était ainsi possible d'énoncer le principe d'identification comme un axiome

notable qui a traité de l'indétermination. Il est impossible cependant d'identifier la position de Duhem et celle de Quine (Mongin [1988]).

27. Samuelson ([1952a] et [1952b]) reprend l'objection du jeu et il prétend y répondre sur un tout autre plan : il suppose qu'une redéfinition appropriée des résultats donnés par les loteries permet de tenir compte des impressions créées par leur forme concrète. Cette affirmation ne peut avoir qu'une visée normative.

28. Fishburn ([1988], p. 27-28) est l'un des rares à envisager cette objection ; voir aussi Mongin ([2009], p. 319).

explicite à côté de l'indépendance de von Neumann-Morgenstern. Dans cette stratégie, celle-ci n'est plus (A3), mais une condition logiquement moins forte et, d'ailleurs, intuitivement plus naturelle. On ne s'étonnera pas des résultats expérimentaux, qui font apparaître de moindres violations de l'indépendance, le principe prenant désormais sa part dans la réfutation de l'utilité attendue<sup>29</sup>.

Pour autant, les théoriciens de la décision ont généralement conclu que l'indépendance de von Neumann-Morgenstern, dans une variante ou l'autre, expliquait la réfutation de l'hypothèse de l'utilité espérée. Ils auraient dû en passer par une résolution argumentée du problème de Duhem qui accompagne inéluctablement la lecture empirique du paradoxe, mais ils se sont contentés des linéaments d'une telle argumentation ; la voici proposée en quelques mots.

Tout d'abord, si la théorie s'en prend à l'équivalence des formes réduite et composée, elle perd le formalisme bien compris de la section 2, et elle devient alors incommode à développer mathématiquement. De fait, elle tire ses principaux succès des résultats qu'elle obtient sur les mesures de risque et d'aversion pour le risque, et ces dérivations, qui coulent de source tant qu'on définit les loteries comme des vecteurs ou, généralement, des mesures de probabilité, deviennent pénibles ou même interdites sinon. Par ailleurs, si la théorie abandonne l'indépendance, elle voit s'offrir des généralisations mathématiques naturelles ; en substance, elle passera de la formulation *linéaire* que constitue l'utilité espérée à des formulations *non linéaires* qui rendent compte d'un plus grand nombre de choix. Ultérieurement, la théorie se fera moins permissive en imposant des restrictions à la non-linéarité, de manière à sélectionner les choix précis qu'elle veut expliquer. Ce double mouvement de généralisation et de restriction est classique dans les sciences de la nature mathématisées<sup>30</sup>.

Même s'ils pèsent lourd, les avantages du formalisme ne suffiraient pas à emporter la conclusion dans une discipline empirique. Le plus puissant reste celui-ci : on a multiplié les expériences de choix de loteries, et on est parvenu à dégager de cette manière des généralités approximatives. Or, la plupart de ces régularités, sinon toutes, reviennent à dire dans quelles circonstances l'indépendance de von Neumann-Morgenstern est violée. Nous avons parcouru l'effet de conséquence commune, l'effet de certitude, l'effet de rapport commun et il s'en trouve d'autres<sup>31</sup> ; en bref, on dispose d'explications relativement systématiques des données. Il n'y a rien de semblable qu'on puisse attendre si l'on choisit de mettre en cause l'identification des loteries. Bien qu'on ait maintenant des raisons précises de conclure que cette hypothèse est violée, on n'a pas – du moins à ce jour – réussi à établir de régularités qui présideraient aux violations. Les facteurs que l'intuition psychologique avait d'emblée reconnus – le plaisir ou déplaisir de la composition, les difficultés calculatoires, les violations de

29. Parmi les auteurs qui se sont penchés sur les loteries composées, nous mentionnerons Segal [1990] pour la reformulation théorique et Birnbaum et ses collaborateurs pour les résultats expérimentaux (Birnbaum, Coffey, Mellers et Weiss [1992], et Birnbaum [1998]). Une explication récente de Birnbaum [2004] suppose que les agents du paradoxe ne fusionnent pas ou ne décomposent pas les probabilités identiques, comme on admet d'ordinaire qu'ils le font pour  $p_1$  et  $p'_1$ . Si elle était avérée, cette violation du principe serait la plus forte possible.

30. Allais suivait déjà cette double démarche en 1952-1953, mais elle a une portée plus complexe chez lui, car elle comporte le volet normatif que nous allons exposer.

31. Certaines des régularités ne portent pas sur la comparaison de choix successifs : ainsi l'effet d'évaluation des utilités qu'Allais ([1979], p. 474) découvre en traitant les réponses au « sondage » et qui fut corroboré par la suite. Cet effet semble avoir été reconnu par Karmakar [1978].

l'indépendance stochastique – ne se mettent pas en série, même au vu des expériences réalisées par la suite.

Le critère de l'explication systématique figure dans plusieurs conceptions philosophiques du progrès des sciences. Sans les détailler, il suffira de dire qu'il cautionne la théorie de la décision comme elle s'est finalement développée, et qu'on peut le faire servir à une reconstruction rationnelle des changements observés ; nous renvoyons à Mongin [2009]. Mais comme celui-ci l'indiquait déjà, il est trop restrictif d'évaluer la théorie de la décision à l'aune, seulement, d'une interprétation empirique de ses résultats.

## CE QU'ÉTAIT LE PARADOXE : UN PROBLÈME NORMATIF

Le paradoxe comme on le présente aujourd'hui a peu de rapport avec ce qu'il était sous la plume d'Allais. Il faut revenir aux deux écrits où il figure, d'une part, le mémoire rédigé en 1952 et paru en 1953, « Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'école américaine », et, d'autre part, l'article paru en 1953 dans la revue *Econometrica*, « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque ». L'article est devenu la référence universelle, alors qu'il n'est qu'une partie du mémoire – la « critique » est intégralement reprise mais la « théorie positive » est résumée. Le rapprochement des deux titres manifeste la réduction de contenu que déplorait Allais<sup>32</sup>. Pour notre part, nous pourrions nous limiter à l'article, car il est identique au mémoire en ce qui concerne le paradoxe, mais nous étendrons le corpus à quelques textes et discussions qui précèdent ou encadrent cette source.

Du 12 au 17 mai 1952, le CNRS réunit à Paris les principaux représentants de la discipline embryonnaire qu'on nommera bientôt théorie de la décision ; le colloque de Paris est un de ses moments fondateurs. Portant sur la théorie du risque en économie, la réunion vit s'opposer deux groupes, celui qui défendait l'hypothèse de l'utilité attendue, où se rangeaient presque tous les participants américains<sup>33</sup>, et celui qui la contestait, réduit à trois ingénieurs-économistes français, Allais, Massé et Morlat. C'est l'économiste-mathématicien Guilbaud qui réunit, et publia en 1953, les actes entiers du colloque ; ils reprennent les débats en sus des communications, ce qui en fait une source documentaire inestimable.

Le premier groupe s'appuyait tantôt sur l'axiomatique de von Neumann-Morgenstern, dans une formulation voisine de celle que nous avons reprise ici, tantôt sur l'axiomatique ébauchée par Savage au début du colloque, tantôt sur des raisons directes d'adhérer à l'hypothèse d'utilité attendue. Savage se détachait

---

32. Voir la note explicative d'Allais ([1953b], p. 503).

33. De là vient l'appellation d'« école américaine » qu'Allais emploiera par la suite. Savage [1952] et Samuelson [1952a] défendirent l'hypothèse de l'utilité attendue dans des interventions abondamment discutées ; celle de Friedman, favorable mais placée d'un point de vue différent, ne suscita pas la même attention ; Marschak choisit un autre sujet dans sa présentation, mais appuya l'hypothèse pendant les débats, autorisé qu'il était par son axiomatisation récente ; Arrow, également présent, ne prit qu'une part limitée à la discussion, alors qu'il soutiendra l'hypothèse par la suite.

dans ce groupe à cause de sa grande réputation théorique<sup>34</sup>. Samuelson en était l'autre protagoniste à cause de sa formulation axiomatique et de la manière habile dont il s'en servait pour défendre l'hypothèse ; nous détaillons son argument et la réponse d'Allais dans l'annexe I. Malgré sa représentation minoritaire, le second groupe fut très actif, multipliant les objections contre les axiomes ou contre l'hypothèse, parfois sous la forme de contre-exemples, et proposant aussi des formules mathématiques de remplacement. La communication de Massé et Morlat est impressionnante, et une brève intervention du second révèle un ancêtre direct du paradoxe, ce qui nous a conduit à la restituer dans l'annexe II ; pour autant, c'est le seul Allais qui s'imposera, et Frisch, dans son discours de clôture, ne mentionnera que lui pour incarner la position dissidente. Il ne présente pas moins de deux communications, la première qui étend l'équilibre général économique aux situations de risque, et la seconde – celle qui importe ici – consacrée à la théorie individuelle du choix risqué<sup>35</sup>. De plus, il intervient sans cesse pour ramener la discussion, qui parfois se dispersait, vers le débat fondamental qui l'opposait à ses contradicteurs américains<sup>36</sup>.

En parcourant les Actes, on découvre avec surprise qu'ils ne contiennent ni ne mentionnent aucun contre-exemple de la part d'Allais, alors qu'ils en attestent un dans la communication de Massé et Morlat, et un autre – le mieux trouvé – dans l'intervention de Morlat ; comme le paradoxe, chacun consiste en deux choix qui contredisent l'utilité espérée en se juxtaposant. Jallais et Pradier [2005] ont attiré l'attention sur ces faits curieux, et, du coup, ils s'interrogent sur la date de naissance exacte du paradoxe et le partage éventuel de son invention. La première publication remonte au mémoire déjà mentionné, qu'Allais fit publier en appendice de l'ouvrage des Actes en 1953. On sait aujourd'hui qu'il le rédigea peu après le colloque, sans doute dans le courant de l'été 1952, ce qui fixe une borne supérieure à la datation. Par ailleurs, l'enquête de Jallais et Pradier livre une borne inférieure : ils excluent que le paradoxe ait circulé avant la rencontre en tête à tête, située en marge du colloque, pendant laquelle Savage aurait été soumis à un questionnaire en règle par Allais. C'est de cette rencontre, demeurée célèbre parmi les théoriciens de la décision, qu'on peut dater au moins la première apparition publique du paradoxe. Quant à une influence possible de Massé et de Morlat sur la découverte, la chronologie ne l'exclut ni ne l'impose<sup>37</sup>. Jallais et Pradier déplacent la question après avoir constaté que les contre-exemples des deux auteurs n'avaient eux-mêmes rien d'exceptionnel. Il en aurait

34. L'autre grand fondateur du bayésianisme contemporain, de Finetti, était présent et il se montra également favorable à l'hypothèse de l'utilité espérée, avec laquelle il prit ses distances ultérieurement.

35. *Économétrie*, p. 81-109 (« Généralisation des théories de l'équilibre général et du rendement social au cas du risque ») et p. 127-140 (« Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque »). Bien qu'ils aient des objectifs théoriques distincts, les deux textes sont reliés par une réticence commune à l'égard de l'hypothèse de l'utilité espérée. On lit encore dans les Actes, placées avant le discours de clôture, de brèves « Observations générales » dont nous ne savons pas si elles ont été prononcées.

36. Voir *Économétrie*, p. 34-35 et p. 37-40, en réponse à la communication de Savage ; p. 153-163, en réponse à celle de Samuelson et pour défendre la deuxième d'Allais (cet échange, le plus révélateur de tous, portait sur les deux communications antagoniques à la fois) ; et p. 194-197, en appui de Massé et Morlat.

37. Il manque le témoignage des intéressés. Après le colloque, Massé et Morlat s'éloignèrent de la controverse. Les deux hommes étaient alors ingénieurs chez Électricité de France, Morlat le restera et Massé occupera des fonctions administratives importantes.

circulé du même type, et leur fabrication aurait fait partie d'un exercice collectif propre à l'école française (les Américains, pour leur part, semblent avoir découvert le genre à Paris).

Ces précisions érudites ont leur importance, car elles font cerner mieux ce que pouvait être l'intention d'Allais en produisant des contre-exemples : *ils sont comme un dernier recours argumentatif, une fois que les moyens d'exposition plus traditionnels ont échoué*. De fait, pendant le colloque même, il s'était exprimé à un plus haut niveau d'abstraction et avec plus de ressources mathématiques. Bien que peu enclin à l'axiomatisation, il s'en était rapproché dans l'idée manifeste d'investir le terrain de ses adversaires. Mais si l'on en juge par les Actes, cette stratégie avait échoué, car ses grands adversaires, Savage et Samuelson, étaient demeurés inflexibles, et les auditeurs moins engagés s'en étaient tenus à des politesses. En écrivant le mémoire, puis en extrayant de celui-ci l'article qui met les contre-exemples en valeur aux dépens de la théorie pure, Allais croit pouvoir faire enfin pencher la balance de son côté<sup>38</sup>.

L'article d'*Econometrica*, auquel nous nous en tiendrons maintenant, expose quatre thèses, qui visent à composer une démonstration, et celle-ci paraît si claire qu'on peut s'étonner que la théorie de la décision postérieure en ait si peu tenu compte. (1) L'hypothèse de l'utilité espérée ne s'applique pas à l'homme réel, et tout un chacun, y compris au sein de l'école américaine, s'accorde désormais à le reconnaître. (2) La seule question pendante est alors de savoir comment l'hypothèse s'applique à l'homme rationnel, et on ne peut pas la trancher en invoquant simplement sa convenance avec une axiomatique, puisque la question se déporterait alors vers l'axiomatique elle-même. (3) Si l'on part d'une définition explicite (dite « abstraite ») de la rationalité individuelle en matière de risque, on n'en déduira pas l'hypothèse de l'utilité espérée, celle-ci étant beaucoup plus contraignante que ce que la définition permet d'affirmer. (4) Suivant une autre manière d'appréhender la rationalité individuelle en matière de risque, il faut étudier ce que font les hommes rationnels, mais cette définition (dite « expérimentale ») n'est pas plus favorable à l'hypothèse que l'était la précédente. Allais n'indique pas aussi bien qu'il le faudrait quelle est sa conclusion dernière – là est le seul manque de clarté du raisonnement – et nous distinguerons à sa place deux variantes possibles, *faible* et *forte*. Soit, respectivement : (5) la rationalité individuelle en matière de risque est compatible avec d'autres hypothèses que celle de l'utilité espérée, et (6) l'hypothèse de l'utilité espérée viole quelquefois la rationalité individuelle en matière de risque<sup>39</sup>.

Le stade (1) manifeste déjà une rupture patente avec ce que sera bientôt l'interprétation ordinaire. Comment Allais pourrait-il bien présenter le paradoxe à la manière d'une réfutation empirique s'il tient déjà pour évidente la fausseté de l'hypothèse ? Les Actes du colloque montrent que cette même conviction

38. Au début du mémoire, Allais dit en substance qu'il l'a écrit pour réfuter Savage mieux qu'il n'a pu le faire pendant le colloque (*Économétrie*, Appendice, p. 257).

39. À un endroit précis, Allais distingue la conclusion faible et la conclusion forte, et il affirme l'une et l'autre : « Il en résulte que : (1) pour être rationnel un individu donné ne doit pas nécessairement se comporter comme le voudrait le principe de Bernoulli ; (2) qu'en réalité, les conséquences de la définition abstraite de la rationalité étant moins restrictives que les axiomes de l'école bernoullienne, ces axiomes contiennent quelque chose de plus qui, en fait, peut être irrationnel ! » ([1953b], p. 522). Mais ce passage est intercalé dans le cours même du raisonnement, et les conclusions finales qu'il présente seront moins claires.

dominait les participants, *y compris ses adversaires théoriques*, de sorte qu'Allais pouvait la tenir pour acquise lorsqu'il débattait avec eux<sup>40</sup>. De fait, le paradoxe n'intervient pas avant l'étape (4), qui s'inscrit dans la configuration normative instaurée par l'étape (2).

Que les adversaires se trouvent déjà installés sur le terrain normatif ne manquera pas de surprendre les théoriciens de la décision qui s'en tiennent au schéma reçu : redécouvrant l'hypothèse de l'utilité espérée, von Neumann et Morgenstern et leurs premiers successeurs l'auraient d'abord conçue et développée sous la forme d'une prédiction empirique ; les contre-exemples d'Allais auraient joué le rôle d'une réfutation, à la suite de quoi les tenants de l'hypothèse se seraient rabattus sur les arguments normatifs en sa faveur. L'annexe III achève de faire justice de cette reconstruction erronée.

La précision qu'apporte (2) en matière d'axiomatique semblera triviale, mais elle se justifie par le contexte – les successeurs de von Neumann prêtaient sans doute aux théorèmes de représentation une attention exagérée par rapport à celle que méritait l'interprétation des axiomes. L'étape (3) est en revanche très informative, bien qu'on puisse la juger dogmatique dans son extrême concision. Pour Allais (1953b, p. 522), la « définition abstraite » de la rationalité individuelle se ramène à trois propriétés seulement : le caractère ordonné des choix, le recours aux probabilités objectives si elles sont disponibles, et un « axiome de préférence absolue » qu'il emprunte à Massé et Morlat, et qui peut s'interpréter, en termes contemporains, comme le respect de la dominance stochastique<sup>41</sup>. Cette définition volontairement courte ne suffit pas à impliquer l'hypothèse de l'utilité espérée. Dans notre décomposition, le caractère préordonné des choix correspond à (A1) et l'« axiome de préférence absolue » à une simple conséquence de (A3). Il est remarquable qu'avec les autres protagonistes de l'école française, Allais ait immédiatement compris la relation logique correcte avec (A3)<sup>42</sup>. Quant aux probabilités objectives, qu'il identifie à des fréquences, il se contente de l'idée banale qu'elles conditionnent le succès de l'action et qu'il est donc rationnel de les adopter si possible.

Le stade (4), celui du paradoxe, correspond à « l'observation de ce que font des hommes rationnels et tout à fait au courant du calcul des probabilités »

40. Marschak (*Économétrie*, p. 25) concède d'emblée que l'hypothèse de l'utilité espérée ne s'applique pas à « l'homme de la rue » et il restera fidèle à cette position. Allais la prête à Savage, qui ne la conteste pas : « Il ne s'agit naturellement pas ici du comportement des hommes réels puisque M. Savage reconnaît bien volontiers que sa théorie ne leur est pas applicable » (*ibid.*, p. 38). De fait, l'exposé de Savage était d'orientation prescriptive, à la différence des travaux antérieurs avec Friedman. Samuelson lui-même accorde que « tant qu'il s'agit d'expliquer le comportement des hommes réels sur notre planète, l'hypothèse de [l'utilité espérée] est plutôt insignifiante » (*ibid.*, p. 142). Il n'y a que Friedman dont la communication, tournée vers l'économie positive comme ses articles antérieurs, exprime une note discordante.

41. La note 22 rappelle ce qu'est la relation de dominance stochastique entre deux loteries. L'axiome de Massé et de Morlat (*Econométrie*, p. 167-168) demande en substance que, si P domine stochastiquement Q, P soit préféré à Q. La formulation des deux auteurs est hésitante, de même que celle d'Allais (p. 518), parce qu'elle peut évoquer une autre forme de dominance, qui supposerait des états du monde bien définis. On retrouve à ce point la confusion de l'époque entre deux cadres d'analyse, celui de von Neumann et Morgenstern et celui de Savage ; voir la note 4.

42. Friedman et Savage [1952] étaient moins avancés. Leur raisonnement des pages 468-469, qui est resté fâcheusement célèbre, prétend dériver l'indépendance de von Neumann et Morgenstern à partir du respect de la dominance stochastique, confondant ainsi la prémisse et sa conséquence stricte.

(p. 524). Il nous reste à comprendre l'attribut de rationalité en sus des deux autres attributs, l'aptitude probabiliste et la prudence extrême (cf. « des gens très prudents », p. 525), que l'individu allaisien possède nécessairement. Il faut des arguments nouveaux, sans quoi l'objection de l'étape (2) se retournera contre son auteur, et la représentation du paradoxe comme un simple fait empirique se trouvera la seule qui tienne. À la section suivante, nous identifions les stratégies esquissées par l'article, et nous les évaluons. L'une met en avant *les raisons subjectives de l'agent pour ses choix paradoxaux* ; nous montrerons qu'elle n'aboutit pas. L'autre s'attache à *la rationalité de l'agent vu comme personne et non plus par rapport à ses choix* ; nous montrerons qu'elle est prometteuse.

## LES ARGUMENTATIONS NORMATIVES DU PARADOXE

Parmi les raisons subjectives à considérer, la plus immédiate est assurément la certitude du gain dans l'une des quatre loteries. D'après Allais (p. 527), un homme très prudent est susceptible de préférer  $p_1$ , qui garantit une somme non négligeable, à  $q_1$ , qui fait espérer plus mais sans garantie absolue ; et ce même homme peut très bien préférer  $q_2$  à  $p_2$ , parce qu'un critère de choix plus audacieux, par exemple celui de l'espérance mathématique de gain, lui devient acceptable dès lors que l'incertitude affecte les deux options. Une autre raison importe, que l'article n'énonce en fait pas à propos du paradoxe, mais du contre-exemple qui fait suite. Elle veut que *les chances données aux résultats ne s'apprécient pas isolément les unes des autres*, parce qu'elles entretiennent des relations « de complémentarité (ou de non-complémentarité) » (p. 528). Si l'on transpose l'idée aux quatre loteries du paradoxe, on dira que les 11 chances de gagner 100 M ne doivent pas signifier la même chose dans  $p_1$ , où les 89 chances restantes sont de la même nature, et dans  $p_2$ , où elles vont à l'absence de gain. De même, les 11 chances de gagner 1 M ne doivent pas signifier la même chose dans  $q_1$  et  $q_2$ , où les 89 chances restantes portent, respectivement, sur un gain positif et sur un gain nul.

Le second raisonnement est moins naturel que le premier, car il n'exploite pas, comme celui-ci, des comparaisons internes au choix donné (entre  $p_1$  et  $q_1$ ,  $p_2$  et  $q_2$ ), mais de choix à choix (entre  $p_1$  et  $p_2$ ,  $q_1$  et  $q_2$ ), ce qui l'exclut de la délibération de l'agent s'il la conduit séquentiellement. Mais il a l'avantage d'une généralité supérieure : des « complémentarités » ou « non-complémentarités » subjectives peuvent s'établir entre des chances qui, prises ensemble, ne forment pas un tout de certitude, et en particulier dans des cas où l'extrême prudence n'a plus rien à conseiller. L'article de 1953 privilégie le premier raisonnement, et certains textes ultérieurs d'Allais ne mentionnent plus que lui<sup>43</sup>, mais on ne serait pas fondé à ignorer le second. Ils correspondent aux deux effets de certitude et de conséquence commune qui, d'après la littérature empirique, se renforcent pour incliner l'agent vers ( $p_1$ ,  $q_2$ ). Certes, l'analyse porte désormais sur les justifications que l'on peut donner aux choix, mais, sous ce rapport, il ne semble pas que l'un se présente

43. Par exemple ceux de l'ouvrage de 1979 et son article de dictionnaire consacré au paradoxe (Allais [1987]).

plus mal que l'autre. Un individu réfléchi, auquel on demanderait de justifier  $(p_1, q_2)$  pris comme un tout, pourrait très bien se défendre par l'argument des complémentarités.

La question est de savoir si les raisons subjectives associées aux deux effets sont de nature à fonder un jugement de rationalité en faveur de l'agent paradoxal. Pour qui se réclame de la rationalité-cohérence, à la manière des économistes, la réponse doit être négative. Les effets déterminent *substantiellement* les choix, dans le même registre que les propriétés de croissance ou non, de concavité ou non, que les économistes envisagent à propos des fonctions d'utilité. La rationalité-cohérence ne veut imposer au choix que des conditions *formelles*, dont le registre s'illustre par la simple existence des fonctions d'utilité, en deçà de toute détermination de leurs propriétés. Allais se dit partisan de la rationalité-cohérence<sup>44</sup>, et sa réponse ne peut donc qu'être négative aussi. D'ailleurs, nous avons vu qu'à l'étape (3), il plaçait la « définition abstraite » de la rationalité à un niveau d'abstraction qui empêchait d'en déduire l'hypothèse de l'utilité espérée ; il n'est pas possible non plus qu'elle implique la violation de l'hypothèse. Nous ne voyons pas de difficulté conceptuelle à reconnaître que les effets précédents saisissent des raisons authentiques, au-delà des simples causes actives sur le comportement, tout en jugeant que leur force normative ne soit pas déterminante : ils ne suffisent pas à différencier des choix rationnels de choix qui ne le seraient pas. Une telle position est en accord logique avec les brèves indications d'Allais.

Si l'on arrêterait maintenant l'analyse, c'est la conclusion faible (5) qui se dégagerait : on serait en droit d'écarter l'objection d'irrationalité contre l'agent paradoxal, mais non pas de la retourner contre l'agent qui suit l'utilité attendue, ainsi que le voudrait la conclusion forte (6). Modeste en lui-même, le résultat n'apparaîtrait saillant qu'en vertu des circonstances historiques de la controverse sur l'utilité espérée. Comme ses partisans avaient hasardeusement prétendu que les axiomes de von Neumann-Morgenstern *découlaient de la notion même de rationalité*<sup>45</sup>, Allais n'avait qu'à établir (5) : à thèse forte et provocante, contradiction facile et banale. Déjà, l'étape (3) atteint le but pour peu que l'interlocuteur endosse la « définition abstraite » de la rationalité, ce qui n'est pas improbable s'il s'agit d'un partisan de la rationalité-cohérence. L'étape (4) ne servirait plus que dans l'éventualité contraire, ce qui restreint beaucoup la portée argumentative du paradoxe.

Au prix d'un effort supplémentaire, la conclusion pourrait se muer de faible en forte. Supposons un individu rationnel au sens des trois propriétés de la « définition abstraite », sur lequel s'exerce l'un des deux effets considérés, et auquel cet effet, en présence des trois propriétés, fait irrésistiblement choisir  $(p_1, q_2)$ . Alors, un interlocuteur qui aurait jugé satisfaisante la « définition abstraite » devrait conclure que ces choix sont les seuls rationnels pour cet individu : ils sont rationnels en vertu de la définition, et ils sont les seuls rationnels parce que l'individu était causalement déterminé à choisir comme il a fait. L'interlocuteur devrait alors concéder (6). Si le schéma démonstratif paraît viable, il reste à le réaliser, ce qui suppose de faire entrer

44. « En dehors de la condition de cohérence, il n'y a pas de critère de la rationalité des fins considérées en elles-mêmes. » (p. 521.)

45. Samuelson et Savage, avec des arguments discutables que discute l'annexe III.

l'effet en question dans une théorie susceptible d'*impliquer logiquement* ( $p_1, q_2$ ), et non pas seulement d'être *logiquement compatible* avec ce résultat. La théorie doit par ailleurs inclure la « définition abstraite » et s'appliquer de manière convaincante à un individu au moins. Dans la période qui nous occupe, ces exigences métathéoriques dépassaient les moyens d'Allais<sup>46</sup>.

Mais l'analyse ne s'arrête pas là, car un autre argumentaire s'ébauche entre les lignes de l'article de 1953. Il faut d'abord revenir à cette expression d'*homme rationnel*, qui donne à penser qu'Allais s'intéresse moins à la rationalité des choix qu'à celle des personnes. Elle pointe dans deux directions principales, dont une seule a été indiquée :

(a) l'homme rationnel conforme ses choix aux trois propriétés de la « définition abstraite » ;

(b) l'homme rationnel procède à ses choix de manière réfléchie, en veillant à les conformer à des règles générales de conduite qu'il approuve.

Nous venons de montrer les limites de (a) s'il s'agit de rejoindre la conclusion forte. Il nous reste à explorer les possibilités qu'offre (b), en y plaçant (a) comme cas particulier, de manière à construire une position unifiée : les trois propriétés figureront parmi les règles générales de conduite que l'homme rationnel approuve. En revanche, nous le détachons de deux autres types d'hommes qu'Allais ne sépare pas toujours de lui : *le prudent et celui que l'opinion regarde comme rationnel*. Il découle de la rationalité-cohérence que la prudence ne soit qu'une disposition psychologique, contingente par rapport à ce qu'exige la rationalité même si elle se trouve souvent réunie avec elle, et de manière encore plus évidente, que la désignation par l'opinion publique soit une adjonction extérieure à la rationalité, un simple indice non probant de sa présence effective<sup>47</sup>.

L'aptitude probabiliste soulève un problème d'interprétation plus délicat. La formulation conjonctive d'Allais – « des hommes rationnels et tout à fait au courant du calcul des probabilités » – donnerait à penser qu'il sépare les deux considérations. Mais il peut les tenir distinctes plutôt que les séparer, et la « définition abstraite » impose en fait cette interprétation. Elle comporte le recours aux probabilités objectives ; si cette propriété doit être satisfaite, il faut évidemment que l'aptitude probabiliste le soit ; la liaison n'est pas logique (on peut recourir aux probabilités objectives sans respecter les lois du calcul !) mais pragmatique. Nous pouvons donc inclure l'aptitude probabiliste dans (a) et (b), et cette décision présente un avantage par rapport à la lancinante question des loteries composées. En effet, si l'on écarte les préférences relatives à la forme des loteries comme une complication annexe, les raisons cognitives font l'obstacle principal à l'identification des deux types de loteries, et elles tombent maintenant grâce au point de vue normatif adopté.

Mais si l'on veut parvenir à la conclusion forte, il ne suffit pas de dire abstraitement ce que sont les hommes rationnels, il faut encore pouvoir les reconnaître.

46. Nous ne trancherons pas la question de savoir si la théorie de l'utilité dépendante du rang, qu'Allais [1988] a défendue par la suite, réaliserait le schéma démonstratif.

47. Nous nous éloignons ainsi de Jallais, Pradier et Teira [2008], qui tirent Allais du côté des idées anciennes sur la prudence comme sagesse pragmatique et l'opinion publique comme pierre de touche de sa possession. Se réclamer de l'opinion publique est d'ailleurs un procédé rhétorique familier, conforme à ce que nous croyons être le but circonstanciel du paradoxe en 1952 (section 4).

C'est à ce point qu'importe une autre expression remarquable, celle de la *définition expérimentale de la rationalité*. Il n'est presque aucun lecteur qui l'ait relevée, sans doute parce qu'elle semble envelopper une contradiction dans les termes<sup>48</sup>. Ici encore, on peut envisager plusieurs interprétations ; nous les restituerons sous la forme de procédures expérimentales concrètes.

– (P1) consiste à fixer certains critères de rationalité, puis à sélectionner, grâce à eux, les sujets qu'on soumettra aux expériences, celles-ci visant à faire saisir comment des hommes rationnels choisissent.

– (P2) consiste à mener des expériences sur des sujets à première vue quelconques, en aménageant ces expériences de manière que, tout ensemble, elles indiquent quels sujets sont rationnels et fassent saisir comment des hommes rationnels choisissent.

– (P3) procède comme (P2), mais en visant à faire comprendre non seulement la façon dont des hommes rationnels choisissent, mais encore ce qu'est plus précisément la rationalité qui s'applique à eux.

Du point de vue exégétique, c'est (P1) qui décrit le mieux l'intention d'Allais. L'élucidation de l'homme rationnel lui sert à restreindre la population des sujets préalablement à l'expérience. D'abord dans les à-côtés du colloque, ensuite, avec plus d'esprit de système, quand il distribue le fameux « sondage », il procède ainsi. Les théoriciens qu'il interroge par oral ou par écrit sont à première vue capables de délibérer leurs choix en les confrontant à des règles générales. *Mutatis mutandis*, il en va de même des étudiants de l'École des Mines, qui forment l'autre public d'Allais. Dans les deux cas, la « définition abstraite » peut sembler réalisée, et donc l'aptitude probabiliste comme cas particulier.

La procédure (P2) s'offre à l'esprit par contrecoup, une fois que l'on se convainc que la sélection précédente est grossière. Elle fait reposer le test de rationalité sur les indices douteux des réputations constituées ou des concours réussis – n'a-t-on d'ailleurs pas quelquefois moqué le « sondage » à cause des préjugés méritocratiques du polytechnicien Allais ? L'idée vient alors d'*employer l'expérience elle-même à sélectionner les hommes rationnels*. Leur disposition caractéristique étant de confronter leurs choix particuliers à des règles générales qu'ils approuvent, il suffira de mettre cette disposition à l'épreuve par des protocoles bien choisis. Avant que la section suivante ne les détaille, en voici le principe résumé : ils juxtaposent des phases de choix entre des loteries avec des phases de réflexion provoquée par l'expérimentateur, celle-ci prenant la forme d'une comparaison, des règles qui sont circonstanciellement pertinentes ; les sujets qui approuvent des règles défavorables à leurs choix, ou qui désapprouvent des règles favorables à leurs choix, et qui pour autant persistent dans ces choix, s'excluent d'eux-mêmes comme irrationnels. On rend ainsi opérante la conception (b) sous la forme de la rationalité-cohérence, mais autrement qu'avec (a), parce que la cohérence porte maintenant sur les actions et leurs raisons. La procédure (P2) s'applique en droit à toute espèce de population initiale, mais on peut lui faire prendre la suite de (P1) si on le désire.

La procédure (P3) s'enchaîne sur la précédente en élargissant le but explicatif à la rationalité elle-même. Ici, la notion clé ne sert plus seulement à identifier les sujets dont on examine le comportement de choix, mais elle devient un

48. Par une rare exception, Roth ([1995], p. 8) la signale, mais sans la développer.

sujet d'étude indépendant. Par exemple, il peut se faire que les sujets rationnels au sens de (P2) offrent des caractéristiques déterminées, ce qui éclairerait l'expérimentateur sur l'écologie de la rationalité. Ou bien, si les protocoles de (P2) font intervenir plusieurs notions de cohérence à la fois, il est pertinent d'en repérer la coïncidence ou non<sup>49</sup>. Ou encore, si différentes expériences font intervenir différents stimulants de la réflexion rationnelle – l'expérimentateur peut intervenir en personne ou non, il peut laisser les sujets réfléchir solitairement ou collectivement –, il vaut la peine d'en comparer l'efficacité. Les découvertes excéderont l'objectif de (P2), qui est seulement d'étudier des choix, même s'ils émanent d'hommes rationnels.

La procédure (P2), qui nous occupera dans le reste de l'article, donne enfin sa chance à la conclusion forte (6). *Si l'on juge qu'elle identifie les sujets rationnels de façon probante, il suffit d'interpréter les choix que font ces sujets comme étant des choix rationnels.* Le glissement d'idées est naturel sans être trivial. Au lieu de s'interroger directement sur la rationalité des choix, ce qui entraîne dans des circularités caractéristiques, on fait le détour par la rationalité des individus et l'on revient à celle des choix. L'expérience choisie devra montrer en outre que les choix effectués sont *exclusifs*, de manière à rendre tout autre choix irrationnel. Par exemple, si  $(p_1, q_2)$  s'accompagne, après délibération du sujet, de l'approbation d'une règle qui implique logiquement ce résultat, alors on dispose d'un témoin assez fort pour conclure à (6), et non plus seulement (5)<sup>50</sup>.

## TRADUCTIONS EXPÉRIMENTALES DE LA RATIONALITÉ

C'est au tournant des années 1970 que le paradoxe d'Allais entre dans sa phase de réfutation empirique. Sans remettre en cause ce jugement administré par la section 3, nous devons le compléter, car il ne rend pas justice à la richesse des travaux de l'époque. Ceux-ci ne visaient pas seulement à fixer un intervalle pour le taux de violation quand on soumet le paradoxe ou ses variantes à des sujets quelconques ; ils ne visaient pas seulement à expliquer les choix de ces sujets en identifiant des effets psychologiques réguliers ; ils se proposaient en outre d'éprouver la solidité normative du paradoxe en faisant figurer la rationalité dans l'expérience. Ce dernier objectif est le fil rouge qui unit les travaux de MacCrimmon [1968], Moskowitz [1974], Slovic et Tversky [1974] et MacCrimmon et Larsson [1979]. L'article de Kahneman et Tversky [1979], que la section 3 alignait avec les précédents, rompt le fil. Seul de la série qu'on lise et même connaisse encore aujourd'hui, il aura exercé, de l'avis général, une influence considérable sur la théorie de la décision. C'est de lui précisément qu'il faut dater la réduction du paradoxe à son interprétation actuelle<sup>51</sup>.

49. La cohérence des choix avec des règles approuvées constitue l'essence de (P2), mais la procédure peut tester aussi la cohérence mutuelle des règles qu'approuve le sujet ; la section suivante donnera un exemple.

50. Il faut en outre que le sujet n'approuve aucune règle qui impliquerait logiquement un autre résultat que  $(p_1, q_2)$ , mais cette condition peut être confiée à (P2), parce qu'elle relève de la vérification de rationalité.

51. Restés obscurs, les articles de Karmakar ([1978], [1979]) accompagnaient aussi la réinterprétation empirique du paradoxe et des hypothèses qu'il appelle. Il vaut la peine de souligner que

Le travail de MacCrimmon [1968] appelle une attention particulière, car il a influencé les autres et fait le lien avec Allais, dont le point de vue normatif l'a inspiré<sup>52</sup>. Il ne se propose rien de moins que d'« éprouver les implications normatives des postulats » de la théorie de la décision<sup>53</sup>. Cinq postulats sont pris en compte, chacun se voyant associer une expérience particulière, et parmi eux figure (A3) avec le paradoxe d'Allais comme répondant expérimental. Celui-ci apparaît dans une certaine variante que MacCrimmon a dû retenir parce qu'elle lui facilitait la communication avec les sujets – en l'occurrence, des hommes d'affaires. Mais cette variante est douteuse au plan théorique, ce que le travail ultérieur avec Larsson avouera en substance. En effet, alors que le paradoxe d'Allais ne fait référence qu'à des valeurs de probabilités, MacCrimmon suppose des états du monde qui les réalisent d'une façon bien particulière et susceptible d'orienter les réponses. Cette transcription remonte à Savage dans sa critique d'Allais, et elle a eu malheureusement une influence réelle ; son caractère spécieux est reconnu aujourd'hui<sup>54</sup>.

Les résultats de MacCrimmon se ressentent de cette faiblesse, mais elle n'affecte pas sa méthode, qui est de soumettre les sujets à une vérification de rationalité. Ils doivent en premier lieu choisir entre  $p_1$  et  $q_1$ , et  $p_2$  et  $q_2$ , puis recevoir des « réponses préparées », qui énoncent, sur un même support écrit, des choix *et des raisons qui les justifient*. L'expérimentateur prétend que les données lui viennent d'une expérience menée avec d'autres sujets dans des conditions comparables. Une fiche défend ( $q_1, q_2$ ) en paraphrasant la condition d'indépendance de von Neumann-Morgenstern – ou ce qui en tient lieu puisque le paradoxe a été modifié – et une autre défend ( $p_1, p_2$ ) par un raisonnement calqué sur l'effet de certitude. Les sujets doivent sélectionner une des deux fiches. Enfin, l'expérimentateur s'entretient avec eux en tête à tête, pour vérifier qu'ils ont compris l'expérience et leur faire évaluer les justifications qui leur ont été proposées (ainsi que d'autres qui leur seraient venues à l'esprit).

Le protocole repose sur le sous-entendu qu'un énoncé relatif à la rationalité des choix peut s'évaluer en le soumettant au jugement théorique et pratique des hommes rationnels. La démarche s'inscrit facilement dans les taxinomies de la section précédente. Par une délibération provoquée, elle opérationnalise la notion d'homme rationnel à l'intérieur de l'expérience. Il s'agit donc de (P2), articulée sur la définition (b), mais conçue pauvrement, car MacCrimmon suppose que tous les sujets atteignent le stade rationnel à la fin de l'expérience ; il ne sélectionne pas ceux dont les choix seuls importent. Les autres articles de la série manifestent la même limite, sauf – dans une certaine mesure – celui de MacCrimmon et Larsson [1979]. Le MacCrimmon de 1968 pratique un genre de sélection des sujets, mais alors simplement exogène : il s'attache à des hommes d'affaires en vertu de l'idée commune qu'ils seraient des experts de la décision pratique. Cette option le rattache donc en même temps à (P1). Elle est

l'apport de Kahneman et Tversky en 1979 est méthodologique plutôt que théorique : l'hypothèse de la transformation subjective des probabilités qu'ils avancent dans leur article se lit déjà clairement chez Edwards ([1954], [1962]).

52. MacCrimmon ([1968], p. 9) rapproche brièvement d'Allais l'idée principale de son article. Celui-ci résume une thèse de 1965 qui est restée autrement inédite.

53. « *To probe the normative implications of the postulates.* » (MacCrimmon [1968], p. 4.)

54. Voir les explications de l'annexe III.

naturellement éloignée de (P3), bien que les données contiennent sans doute un potentiel exploitable pour étudier la rationalité elle-même.

Les résultats manifestent une évolution considérable des 38 sujets au cours de la séquence. Lors d'une des réalisations, 40 % d'entre eux contreviennent à l'utilité attendue au stade du choix brut, et ce taux de violation double au stade suivant, puisque 80 % sélectionnent la fiche où se lisent les choix et la justification par la certitude, mais il s'effondre au stade final de l'entretien, car une majorité de sujets expriment alors leur adhésion aux choix et à la justification par l'indépendance<sup>55</sup>. MacCrimmon suppose que le dernier stade livre la pensée réfléchie des sujets, et il ne tire donc aucune conclusion des deux premiers.

L'entretien joue un rôle équivoque dans le protocole. Il sert à vérifier que les sujets avaient compris les « réponses préparées », ainsi qu'à identifier les raisons qui leur seraient propres, et il sert en outre à recueillir leurs positions finales. Mais, tout naturellement, les sujets pouvaient recevoir comme un argument persuasif ce que l'expérimentateur voyait comme une élucidation sémantique. Frappés par cette objection, Slovic et Tversky [1974] remplacent l'interview par une nouvelle expérience de choix tout en préservant la structure d'ensemble : *une expérience de choix bruts, un stade explicatif des raisons, un stade terminal qui concentre l'information normativement pertinente*. Les auteurs modifient le contenu des deux premiers stades en revenant au paradoxe littéralement formulé, et cette modification ne peut être indifférente à la conclusion nouvelle qu'ils obtiennent (au dernier stade, 17 sujets sur 29 choisissent à la manière d'Allais)<sup>56</sup>.

Loin de s'en tenir là, Slovic et Tversky croient bon d'essayer une autre séquence expérimentale, en deux stades seulement, le premier consacré à des explications développées, et le second à une expérience unique de choix. Au terme du premier stade, ils demandent aux sujets *d'évaluer les arguments présentés en faveur des différents choix*. Les résultats font apparaître une grave discordance des choix effectifs avec les notes données aux arguments (ceux-là sont légèrement favorables au raisonnement d'Allais, celles-ci nettement conformes à l'utilité attendue). Slovic et Tversky ne concluent rien de leur étude, parce que, manifestement, ils ne savent pas comment raccorder cette expérience à la précédente. Le scepticisme qu'ils expriment s'accorde avec le retournement bientôt visible chez Tversky, c'est-à-dire l'abandon de tout effort pour traduire expérimentalement la rationalité au profit de la seule recherche empirique sur les comportements. On regrette la facilité, car le conflit des deux expériences en appelait précisément d'autres (du coup, il est vrai, plus conformes aux objectifs de (P3) qu'à ceux de (P2), dont les auteurs se contentent).

Toujours à partir des travaux de MacCrimmon, Moskowitz [1974] était aussi parvenu à la séquence ternaire qui place une phase explicative entre deux phases de choix. Son étude comporte deux innovations notables : d'une part, elle compare des modes visuels de présentation différents pour des choix identiques, ce qui annonce l'examen des « effets de cadrage » par les psychologues<sup>57</sup>, et,

55. MacCrimmon indique alors 75 % d'adhésion à la variante retenue pour l'indépendance de von Neumann et Morgenstern.

56. En outre, Slovic et Tversky transforment le deuxième stade en épreuve contradictoire : les sujets qui ont choisi suivant l'utilité attendue reçoivent une réponse préparée à la façon d'Allais, et ceux qui ont choisi comme Allais reçoivent une réponse préparée dans le sens de l'utilité attendue.

57. On a souvent repris le paradoxe sous cet angle particulier ; voir, par exemple, Bierman [1989].

d'autre part, elle inclut dans la phase explicative une discussion libre entre les sujets. Au dernier stade, les sujets ont évolué en direction de l'hypothèse de l'utilité attendue, mais un pourcentage significatif reste fidèle au paradoxe.

Le dernier article de la série, par MacCrimmon et Larsson [1979], a eu l'influence que nous avons soulignée sur le test empirique du paradoxe, mais il nous reste à en indiquer l'apport au test normatif, car il reprend l'idée de son premier auteur en 1968<sup>58</sup>. Le protocole fait encore succéder deux stades, un consacré aux choix bruts et l'autre aux raisons pour les choix, chacun présentant une complexité nouvelle par rapport aux tentatives précédentes. En effet, au premier stade, MacCrimmon et Larsson testent leur représentation paramétrique de l'effet de conséquence commune et de l'effet de rapport commun, et pour cela multiplient les choix offerts aux agents, et, au second stade, ils s'appuient sur un inventaire exceptionnellement fourni des raisons justificatives. Pour la première fois, ils les présentent sous la forme de *règles générales de conduite*, alors que la pratique antérieure s'en tenait à des raisonnements *ad hoc* sur les choix déterminés (comme dans les « réponses préparées » de MacCrimmon). Certaines règles reproduisent des axiomes de la théorie de la décision (par exemple, l'indépendance de von Neumann-Morgenstern), d'autres sont des généralités contradictoires avec ces axiomes (par exemple, l'argument sur la certitude reformulé comme règle de conduite), d'autres encore s'apparentent à des conditions nécessaires communes aux deux groupes, d'autres enfin portent sur les représentations numériques directement (par exemple celle de l'utilité attendue). Au second stade, les sujets doivent évaluer les règles en les notant de 0 (désaccord complet) à 10 (accord complet). L'emploi d'une échelle fait penser à Slovic et Tversky, de même que la suppression de la phase ultime d'entretien, contestée à juste titre par ces deux auteurs.

Les résultats du premier stade ont été couverts à la section 3. Au second stade, les notes manifestent un taux d'accord variable : il est médiocre pour l'utilité espérée ou ses axiomes constitutifs, alors que la règle allaisienne de la certitude se tire bien d'affaire. Les résultats les plus fins exploitent toute l'information *en croisant les choix et les notations*. À propos de l'effet de rapport commun, MacCrimmon et Larsson ([1979], p. 368) divisent leurs 19 sujets en trois : ceux qui, sur tous les choix, vérifient les règles de l'utilité espérée (au nombre de 10), ceux qui, sur les mêmes données, suivent Allais (au nombre de 3), et ceux qui, toujours sur la même base, ont un comportement irrégulier (au nombre de 6). Chaque groupe se voit associer les notes moyennes qu'il attribue aux deux règles discriminantes, celles de l'utilité espérée et la règle allaisienne de la certitude. Les nombres s'ordonnent comme l'hypothèse de rationalité des agents le laisserait attendre – le groupe de 10 valorisant plus les règles de l'utilité espérée et celui de 3 valorisant plus la règle allaisienne – encore que les différences qu'ils présentent semblent modestes.

Lorsqu'ils croisent les deux stades, MacCrimmon et Larsson sont tout près d'une sélection endogène des sujets rationnels. Grâce au nombre de choix effectués au premier stade, ils ont pu repérer un groupe qu'on est fondé à tenir à l'écart, celui des sujets irréguliers, et de fait leurs conclusions normatives n'en tiennent pas compte. Mais en ce qui concerne les deux autres groupes, MacCrimmon et Larsson ne vont pas au bout de leur démarche. En s'attachant

58. Voir MacCrimmon et Larsson ([1979], p. 346, 350, 403).

à des notes moyennes, ils s'interdisent d'isoler les cas aberrants d'évaluations fortement décalées par rapport aux choix. Les données de croisement devraient être individuelles, ce qui permettrait un filtrage pleinement conforme à la procédure (P2) et à la définition (b). Du coup, leur dernier mot reste vague : « Beaucoup de décideurs soigneux et intelligents semblent violer certains axiomes de la théorie de l'utilité espérée, même après avoir réfléchi à leurs choix » ([1979], p. 403). En exploitant toutes les données, ils auraient pu établir les proportions quantitatives de la violation parmi les « décideurs soigneux et intelligents », et indirectement rejoindre la conclusion forte d'Allais, plutôt que sa conclusion faible, que l'on retrouve ici.

	Séquence expérimentale	Stade explicatif	Sélection des sujets rationnels	Conclusion normative
MacCrimmon [1968]	Ternaire (choix/explications/entretiens)	Couples raisons-choix <i>Acceptés ou refusés par les sujets</i>	Triviale	Paradoxe dissous
Slovic-Tversky [1974]	– Ternaire (choix/explications/choix) – Binaire (explications/choix)	– Couples raisons-choix <i>Simplement lus</i> – <i>Idem</i> <i>Notés par les sujets</i>	Triviale	– Paradoxe maintenu – Mal définie
Moskowitz [1974]	Ternaire (choix/explications/choix)	<i>Idem</i> <i>Lus</i> <i>Discutés entre les sujets</i>	Triviale	Paradoxe maintenu
MacCrimmon-Larsson [1979]	Binaire (choix/explications)	Règles générales <i>Notées par les sujets</i>	Sélection sur la cohérence des choix, et non sur la concordance choix-règles	Paradoxe maintenu
Proposition finale	Ternaire (choix/explications/choix)	Règles générales <i>Notées par les sujets</i> <i>Discutées ou non entre eux et avec l'expérimentateur</i>	Sélection sur la cohérence des choix et la concordance choix-règles	À déterminer

Dans une certaine mesure, MacCrimmon et Larsson se rapprochent de la procédure (P3) lorsqu'ils se penchent sur la notation des règles. La procédure consiste notamment à transformer la cohérence des sujets en objet de comparaisons expérimentales. Or, les notes qu'ils donnent aux règles permettent d'évaluer le degré de cohérence interne de leurs raisons, et celui-ci peut être ensuite rapporté au degré de cohérence externe de leurs choix, tel que MacCrimmon et Larsson l'évaluent quand ils répartissent leurs 19 sujets en trois groupes. En substance, le groupe des sujets irréguliers coïncide-t-il ou non avec celui des sujets qui approuvent simultanément des règles contraires<sup>59</sup> ? Ou bien se trouve-t-il

59. Les relations logiques des règles entre elles importent au plus haut point. Si elles sont non pas contradictoires, mais simplement contraires – c'est-à-dire insusceptibles d'être vraies en même

des sujets dont les choix et les jugements des règles sont cohérents quand ils sont pris séparément alors qu'ils ne le sont pas entre eux ? Ces questions tirent l'économie expérimentale des choix dans la direction, plus largement, des sciences cognitives. Il semblerait que l'on puisse y répondre à partir des données mêmes de MacCrimmon et Larsson à condition, encore une fois, qu'elles soient disponibles individu par individu.

En reprenant point par point des travaux aujourd'hui négligés, nous voulions faire sentir les riches possibilités qu'offre la traduction expérimentale de la rationalité. Un tableau les résume et nous l'avons augmenté d'une proposition de synthèse qui tient compte des critiques, et, en particulier, améliore l'exploitation des données séquentielles. En effet, si l'expérience doit sélectionner les sujets par rapport auxquels s'effectue le test, celles-ci prennent une importance déterminante. Nous pouvons exclure comme irrationnels les sujets qui présenteraient l'une ou l'autre de ces deux séquences :

*Choix initiaux – raisons concordantes avec les choix – choix finaux discordants avec les raisons.*

*Choix initiaux – raisons discordantes avec les choix – choix finaux discordants avec les raisons.*

En revanche, nous pouvons classer comme rationnels ceux qui afficheraient les séquences :

*Choix initiaux – raisons concordantes avec les choix – choix finaux concordants avec les raisons,*

*Choix initiaux – raisons discordantes avec les choix – choix finaux concordants avec les raisons.*

Le dernier groupe traduit extérieurement son effort de rationalité en révisant sa position finale, mais on peut contester l'avant-dernier au motif qu'il ne distingue pas entre deux manières de persister dans une position – la simple inertie et la réflexion authentique. Quoiqu'il reste imparfait, le criblage marque un progrès dans la différenciation des sujets. Il peut tourner à l'avantage de l'utilité espérée plutôt que du paradoxe, et il serait donc éclairant que des expériences le mettent en application pratique ; cette opération imposerait d'examiner un plus grand nombre de sujets que dans les premières études, et, en particulier, l'effectif de MacCrimmon et Larsson serait bien trop limité. Même si la tendance actuelle est à l'enrichissement des protocoles, nous ne connaissons pas de travaux récents qui soient encore allés dans cette direction<sup>60</sup>.

temps, mais susceptibles d'être fausses en même temps –, le sujet se montre incohérent s'il les approuve ensemble, mais non pas s'il les désapprouve ensemble.

60. Van de Kuilen et Wakker [2006] comparent des expériences récentes portant sur les contre-exemples d'Allais (l'effet de rapport commun principalement). Les protocoles – dont celui des auteurs – peuvent faire place à un apprentissage séquentiel de la part des sujets, mais aucun ne propose de traduction expérimentale de la rationalité.

## CONCLUSION

Allais aura eu plus d'influence sur la théorie de la décision que son tardif succès ne le donne tout d'abord penser. Si la célébrité ne vint à ses idées qu'au-delà des années 1970, elles auront travaillé souterrainement la théorie tout au long de sa courte histoire. Pour l'hypothèse de l'utilité attendue, qui était alors mal fixée, le colloque de Paris de 1952 joua le rôle à la fois d'une consécration et d'une remise en cause ; elle n'était pas encore stabilisée chez ses défenseurs que, déjà, Allais tentait de la mettre à bas. Grâce à lui, la théorie ne sera pas celle de l'utilité attendue, mais celle où cette hypothèse est débattue, et un monde sépare les deux options méthodologiques. Ainsi, malgré les apparences officielles de la défaite, Allais remporte une forme de victoire en 1952. Mais celle-ci évoque Pyrrhus, car il ne réussit pas à imposer ses idées peut-être plus originales, celles de l'« homme rationnel » et de la « définition expérimentale de la rationalité », qui étaient aussi de nature à orienter la théorie naissante. Bien pis, son succès des années 1980 s'accomplira en fait contre ces idées, et lui-même, sans les abandonner, paraîtra leur donner moins d'importance. En plongeant dans les années anciennes, nous voulions, d'une part, les remettre au centre du paradoxe, si mal restitué aujourd'hui, d'autre part, en suivre le destin contrarié jusqu'au seuil de la théorie contemporaine, enfin, les remettre à l'honneur pour elles-mêmes, et l'historique aura servi, de ce point de vue, à leur donner une forme concrète en attendant que les expérimentateurs d'aujourd'hui prennent le relais.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALLAIS M. [1952], « Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Économétrie*, p. 257-331.
- ALLAIS M. [1953a], « La psychologie de l'homme rationnel devant le risque. La théorie et l'expérience », *Journal de la Société de statistique de Paris*, janvier-mars, p. 47-73.
- ALLAIS M. [1953b], « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque », *Econometrica*, 21, p. 503-546.
- ALLAIS M. [1957], « Sur la théorie des choix aléatoires », *Revue d'économie politique*, 3, p. 381-390.
- ALLAIS M. [1979], « The So-called Allais Paradox and Rational Decisions Under Uncertainty », dans ALLAIS et HAGEN (eds) [1979], p. 437-683.
- ALLAIS M. [1987], « Allais's Paradox », *The New Palgrave. A Dictionary of Economics*, Londres, MacMillan.
- ALLAIS M. [1988], « The General Theory of Random Choices in Relation to the Invariant Cardinal Utility Function and the Specific Probability Function: The [U,  $\phi$ ] Model, a General Overview », dans B. MUNIER (ed.), *Risk, Decision and Rationality*, Dordrecht, Reidel, p. 281-289.
- ALLAIS M. et HAGEN O. (eds) [1979], *Expected Utility and the Allais Paradox*, Dordrecht, D. Reidel.
- ANDREONI J. et SPRENGER C. [2009], « Certain and Uncertain Utility: The Allais Paradox and Five Decision Theory Phenomena », manuscrit, University of California, San Diego.
- BÉRAUD A. [2014], « Le développement de la théorie de l'équilibre général. Les apports d'Allais et de Hicks », *Revue économique*, 1, p. 125-158.
- BIERMAN H. [1989], « The Allais Paradox: A Framing Perspective », *Behavioral Science*, 34, p. 46-52.

- BIRNBAUM M.H. [1998], « The Paradoxes of Allais, Stochastic Dominance, and Decision Weights », dans J.C. SHANTEAU, B.A. MELLERS et D. SCHUM (eds), *Decision Research from Bayesian Approaches to Normative Systems: Reflections on the Contributions of Ward Edwards*, Norwell (Mass.), Kluwer, p. 27-52.
- BIRNBAUM M.H. [2004], « Causes of Allais Common Consequence Paradoxes: An Experimental Dissection », *Journal of Mathematical Psychology*, 48, p. 87-106.
- BIRNBAUM M.H., COFFEY G., MELLERS B.A. et WEISS R. [1992], « Utility Measurement: Configural Weight Theory and the Judge's Point of View », *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 18, p. 331-346.
- BOITEUX, M., MONTBRIAL T. DE et MUNIER B. (dir.) [1986], *Marchés, capital et incertitude. Essais en l'honneur de Maurice Allais*, Paris, Economica.
- BORCH K. et MOSSIN J. (eds) [1968], *Risk and Uncertainty*, Londres, MacMillan.
- BOURGEAIS-GIRONDE S. et GIRAUD R. [2008], « Le tournant cognitif en économie de la décision et des comportements », dans B. WALLISER (dir.), *Économie et cognition*, Paris, Ophrys, p. 55-91.
- BOUYSSOU D. et VANSNICK J.C. [1990], « "Utilité cardinale" dans le certain et choix dans le risque », *Revue économique*, 41, p. 979-1000.
- CAMERER C. [1995], « Individual Decision Making », dans ROTH et KAGEL [1995], ch. 8, p. 587-703.
- CONLISK J. [1989], « Three Variants on the Allais Example », *American Economic Review*, 79, p. 392-407.
- DIEMER A., LALLEMENT J. et MUNIER B. (dir.) [2010], *Contributions de Maurice Allais à la science économique* Paris, Clément Juglar.
- DUHEM P. [1906], *La théorie physique. Son objet, sa structure*, Paris, Chevalier et Rivière (2<sup>e</sup> éd., 1914). Reéd., Paris, Vrin, 1981, intr. P. Brouzeng.
- Économétrie. Voir Fondements et applications de la théorie du risque en économétrie.*
- EDWARDS W. [1954], « The Theory of Decision Making », *Psychological Bulletin*, 51, p. 380-417.
- EDWARDS W. [1962], « Subjective Probabilities Inferred from Decisions », *Psychological Review*, 69, p. 109-135.
- ELLSBERG D. [1954], « Classic and Current Notions of "Measurable Utility" », *Economic Journal*, 64, p. 528-556.
- ELLSBERG D. [1961], « Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms », *Quarterly Journal of Economics*, 75, p. 643-669.
- FISHBURN P.C. [1982], *The Foundations of Expected Utility Theory*, Dordrecht, Kluwer.
- FISHBURN P.C. [1988], *Nonlinear Preference and Utility Theory*, Baltimore, Johns Hopkins University Press.
- FISHBURN P.C. [1989], « Retrospective on the Utility Theory of von Neumann et Morgenstern », *Journal of Risk and Uncertainty*, 2, p. 127-158.
- FISHBURN P.C. et WAKKER P. [1995], « The Invention of the Independence Condition for Preferences », *Management Science*, 41, p. 1130-1144.
- Fondements et applications de la théorie du risque en économétrie*, Paris, Centre national de la recherche scientifique, 1953. Actes du colloque tenu à Paris les 12-17 mai 1952. Cité dans le texte comme *Économétrie*.
- GRANDMONT J.M. [1989], « Rapport sur les travaux scientifiques de Maurice Allais », *Annales d'économie et de statistique*, n° 14, p. 26-38. Version anglaise : « Report on Maurice Allais's Scientific Work », *Scandinavian Journal of Economics*, 91, p. 17-28.
- GUALA F. [2000], « The Logic of Normative Falsification: Rationality and Experiments in Decision Theory », *Journal of Economic Methodology*, 7, p. 59-93.
- HAGEN O. [1972], « A New Axiomatization of Utility Under Risk », *Teorie e Metoda*, 4, p. 55-80.
- HEY J.D. [1991], *Experiments in Economics*, Oxford, Blackwell.
- JALLAIS S. et PRADIER P.C. [2005], « The Allais Paradox and Its Immediate Consequences for Expected Utility Theory », dans P. FONTAINE et R. LEONARD (eds), *The "Experiment" in the History of Economics*, Londres, Routledge, ch. 4.

- JALLAIS S., PRADIER P.C. et TEIRA D. [2008], « Facts, Norms and Expected Utility Functions », *History of the Human Sciences*, 21, p. 45-62.
- KAHNEMAN D. et TVERSKY A. [1979], « Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk », *Econometrica*, 47, p. 263-291.
- KARMAKAR U.S. [1978], « Subjectively Weighted Utility: A Descriptive Extension of the Expected Utility Model », *Organization Behavior and Human Performance*, 21, p. 61-72.
- KARMAKAR U.S. [1979], « Subjectively Weighted Utility and the Allais Paradox », *Organization Behavior and Human Performance*, 24, p. 67-72.
- LENFANT J.S. [2005], « Psychologie individuelle et stabilité d'un équilibre général concurrentiel dans le *Traité d'économie pure* de Maurice Allais », *Revue économique*, 56, p. 855-888.
- LEONARD R. [1995], « From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory, 1928-1944 », *Journal of Economic Literature*, 33, p. 730-761.
- LUCE R. D. et RAIFFA H. [1957], *Games and Decisions*, New York, Wiley.
- MACCRIMMON K.R. [1965], « An Experimental Study of the Decision-Making Behavior of Business Executives », Ph.D. dissertation, University of California, Los Angeles.
- MACCRIMMON K.R. [1968], « Descriptive and Normative Implications of the Decision-Theory Postulates », dans BORCH et MOSSIN (eds) [1968], ch. 1, p. 3-23.
- MACCRIMMON K.R. et LARSSON S. [1979], « Utility Theory: Axioms versus "Paradoxes" », dans ALLAIS et HAGEN (dir.) [1979], p. 333-409.
- MACHINA M.J. [1983], « Generalized Expected Utility Analysis and the Nature of Observed Violations of the Independence Axiom », dans B. STIGUM et F. WENSTOP (eds), *Foundations of Utility and Risk theory with Applications*, Dordrecht, Reidel, p. 263-293.
- MACHINA M.J. [1987], « Choices Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved », *Journal of Economic Perspectives*, 1, p. 121-154.
- MACHINA M.J. [1991], « Dynamic Consistency and Non-Expected Utility », dans M. BACHARACH et S. HURLEY (eds), *Foundations of Decision Theory*, Oxford, Blackwell, p. 39-91.
- MONGIN P. [2003], « L'axiomatisation et les théories économiques », *Revue économique*, 54, p. 99-103.
- MONGIN P. [1988], « Problèmes de Duhem en théorie de l'utilité espérée », *Fundamenta Scientiae*, 9, p. 289-317.
- MONGIN P. [1997], « Expected Utility Theory », dans J. DAVIS, W. HANDS et U. MÄKI (eds), *Handbook of Economic Methodology*, Londres, Elgar, p. 342-350.
- MONGIN P. [2009], *Duhemian Themes in Expected Utility Theory*, dans A. BRENNER et J. GAYON (eds), *French Studies in the Philosophy of Science*, New York, Springer, p. 303-357.
- MORLAT G. [1957], « Sur la théorie des choix aléatoires », *Revue d'économie politique*, 3, p. 378-380.
- MORRISON D.G. [1967], « On the Consistency of Preferences in Allais' Paradox », *Behavioral Science*, 12, p. 373-383.
- MOSKOWITZ H. [1974], « Effects of Problem Representation and Feedback on Rational Behavior in Allais and Morlat-type Problems », *Decision Sciences*, 5, p. 225-241.
- MOSTELLER F. et NOGEE P. [1951], « An Experimental Measurement of Utility », *Journal of Political Economy*, 59, p. 371-404.
- MUNIER B. [1991], « The Many Other Allais Paradoxes », *Journal of Economic Perspectives*, 5, p. 179-189.
- MUNIER B. [1995], « Fifty Years of Maurice Allais' Economic Writings: Seeds for Renewal in Contemporary Economic Thought », dans MUNIER [1995], ch. 1, p. 1-50.
- MUNIER B. [2011], « Maurice Allais, précurseur et devancier de l'analyse du risque contemporain », dans DIEMER, LALLEMENT et MUNIER [2011], ch. 4, p. 75-94.

- MUNIER B. (ed.) [1995], *Markets, Risk and Money. Essays in Honor of Maurice Allais*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- PRAT G. [1999], « Temps psychologique, oubli et intérêt chez Maurice Allais », *Recherches économiques de Louvain*, 65, p. 179-206.
- PRAT G. [1996], « "Hazard", Determinism and Economic Fluctuations in Allais' Thought », dans C. SCHMIDT (eds), *Uncertainty in Economic thought*, Cheltenham, Edward Elgar, 1996, ch. 12.
- PRESTON M.G. et BARRATTA P. [1948], « An Experimental Study of the Auction-Value of an Uncertain Outcome », *American Journal of Psychology*, 61, p. 183-193.
- RAIFFA H. [1968], *Decision Analysis. Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*, Reading (Mass.), Addison-Wesley.
- ROTH A.E. [1995], « Introduction to Experimental Economics », dans ROTH et KAGEL (eds) [1995], ch. 1, p. 3-109.
- ROTH A.E. et KAGEL J.H. (eds) [1995], *Handbook of Experimental Economics*, Princeton, Princeton University Press.
- SAMUELSON P.A. [1952a], « Utilité, préférence et probabilité », dans *Économétrie*, p. 141-150. Version anglaise, « Utility, Preference, and Probability », dans P.A. SAMUELSON, *Collected Economic Papers*, I, Cambridge (Mass.), The MIT Press, 1966, ch. 13, p. 127-136.
- SAMUELSON P.A. [1952b], « Probability, Utility, and the Independence Axiom », *Econometrica*, 20, p. 670-678.
- SAVAGE L.J. [1951], « The Theory of Statistical Decision », *Journal of the American Statistical Association*, 46, p. 55-67.
- SAVAGE L.J. [1952], « Une axiomatisation du comportement raisonnable face à l'incertitude », *Économétrie*, p. 29-33.
- SAVAGE L.J. [1954], *The Foundations of Statistics*, New York, Dover (2<sup>e</sup> éd. 1972).
- SCHOEMAKER P.J.H. [1982], « The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations », *Journal of Economic Literature*, 20, p. 529-563.
- SEGAL, U. [1990], « Two-Stage Lotteries Without the Reduction Axiom », *Econometrica*, 58, p. 349-377.
- SLOVIC, P. et A. TVERSKY [1974], « Who Accepts Savage's Axioms? », *Behavioral Science*, 19, p. 368-378.
- STARMER C. [2000], « Developments in Non-expected Utility Theory: the Hunt for a Descriptive Theory of Choice under Risk », *Journal of Economic Literature*, 38, p. 332-382.
- STERDYNYAK H. [2011], « Maurice Allais, itinéraire d'un économiste français », *Revue d'économie politique*, 121, p. 119-153.
- TIROLE J. [2012], Notice sur la vie et l'œuvre de Maurice Allais, lue à l'Académie des sciences morales et politiques le 26 novembre 2012.
- TVERSKY A. et KAHNEMAN D. [1986], « Rational Choice and the Framing of Decisions », *The Journal of Business*, 59, S251-S278.
- VAN DE KUILEN G. et WAKKER P. [2006], « Learning in the Allais Paradox », *Journal of Risk and Uncertainty*, 33, p. 155-164.
- VON NEUMANN J. et MORGENSTERN O. [1944], *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press (2<sup>e</sup> éd. 1947).
- WEBER B.J. [2008], « The Effects of Payout and Probability Magnitude on the Allais Paradox », *Memory and Cognition*, 5, p. 1013-1023.
- WEINTRAUB R. [1991], « Allais Stability and Liapunov Theory », *History of Political Economy*, 23, p. 383-418.

ANNEXE I

L'ARGUMENT DE SAMUELSON EN FAVEUR DE LA CONDITION D'INDÉPENDANCE

Dans sa communication au colloque de Paris en 1952, Samuelson énonce avec une clarté entière la condition d'indépendance (A3), dite de von Neumann-Morgenstern (section 2). Voici l'argument par lequel il entreprend de la justifier ([1952a], p. 147). Soit un individu qui a établi sa préférence entre deux loteries  $p$  et  $q$ , et qui se voit maintenant proposer deux loteries composées, respectivement, celle qui donne  $p$  avec probabilité  $\alpha$  et  $r$  avec probabilité  $1 - \alpha$ , et celle qui donne  $q$  avec probabilité  $\alpha$  et  $r$  avec probabilité  $1 - \alpha$ . Cet individu ne peut pas faire dépendre sa préférence de ce qui se produit sur l'événement de probabilité  $1 - \alpha$ , puisque les résultats sont alors  $r$  pour chacune des loteries composées. Mais s'il ne fait dépendre sa préférence que de ce qui se produit sur l'événement de probabilité  $\alpha$ , elle se ramène à celle qu'il avait déjà établie entre  $p$  et  $q$ . En adaptant le raisonnement, on justifie aussi la partie réciproque de la condition d'indépendance<sup>61</sup>.

Des participants au colloque, Allais (*Économétrie*, p. 159) aura été le seul à souligner que le problème dynamique ainsi posé pouvait avoir une autre résolution. L'individu doit indiquer sa préférence *ex ante*, c'est-à-dire antérieure à toute résolution de l'incertitude, sur les loteries composées ; ses préférences *intérim*, c'est-à-dire postérieures à la première résolution de l'incertitude, sont comme Samuelson les indique, mais il ne va pas de soi que la première se reconstitue à partir des secondes suivant l'analyse qu'il propose. Que  $r$  se réalise indépendamment de  $p$  ou de  $q$  au stade intérim n'exclut pas que  $r$  puisse, *ex ante*, entretenir des rapports de complémentarité avec  $p$  et avec  $q$ . Allais rejoint ainsi l'une des argumentations normatives du paradoxe (section 5)<sup>62</sup>.

Les deux adversaires de 1952 ont, par avance, balisé le terrain d'un débat qui jouera un grand rôle dans la théorie ultérieure, celui de la *cohérence dynamique* des règles de décision lorsque l'incertitude se résout en plusieurs temps successifs<sup>63</sup>. Nous contestons plus loin Samuelson par une objection qui semble inédite.

ANNEXE II

LE CONTRE-EXEMPLE DE MORLAT

Lors du colloque de Paris, Morlat (*Économétrie*, p. 156-157) proposa le contre-exemple suivant. L'agent doit choisir entre  $p_1$  et  $q_1$ , et entre  $p_2$  et  $q_2$  :

$p_1$ : vous êtes guillotiné avec prob 0,01 vous gagnez 1 000 F avec prob 0,49 vous gagnez 2 000 F avec prob 0,50	$p_2$ : vous êtes guillotiné avec prob 0,49 vous gagnez 1 000 F avec prob 0,01 vous gagnez 2 000 F avec prob 0,50
$q_1$ : vous êtes guillotiné avec prob 0,02 vous gagnez 1 000 F avec prob 0,48 vous gagnez 1 000 000 F avec prob 0,50	$q_2$ : vous êtes guillotiné avec prob 0,50 vous gagnez 1 000 000 F avec prob 0,50

61. Samuelson revient sur l'indépendance de von Neumann-Morgenstern à l'occasion d'un symposium qu'*Econometrica* publiera sur le sujet en cette même année 1952. Il reproduit alors, mais brièvement et sans évoquer la critique d'Allais, son raisonnement du colloque ([1952b], p. 672).

62. « L'équivalence "*ex post*" de deux perspectives aléatoires ne suffit pas à assurer leur équivalence "*ex ante*" » (*ibid.*). Nous disons « intérim » là où Allais dit « *ex post* » parce que l'incertitude se résout en deux temps.

63. Voir la synthèse de Machina [1991].

La solution caractéristique,  $(p_1, q_2)$ , viole l'hypothèse de l'utilité espérée et, si l'on suppose que l'agent identifie les loteries simples et composées, la condition d'indépendance de von Neumann-Morgenstern spécifiquement. À l'instar du paradoxe d'Allais dont il est proche, le contre-exemple de Morlat s'inscrit dans une discussion qui est normative avant d'être empirique. L'auteur écrit en effet : « Beaucoup d'hommes réputés raisonnables préféreront  $p_1$  à  $q_1$ , mais  $q_2$  à  $p_2$ , parce que, dans ce cas, les risques de mort leur sembleront très voisins tandis que, s'ils sont sauvés, ils seront riches dans le cas de  $q_2$ . [...] C'est d'ailleurs le résultat que j'ai obtenu à tout coup auprès des personnes que j'ai pu interroger, et je ne crois pas, quant à moi, pouvoir qualifier cette attitude de déraisonnable ».

Alors que le paradoxe illustre les effets de certitude et de conséquence commune pris ensemble, le contre-exemple de Morlat ne se rattache formellement qu'au second, mais les très petites probabilités que  $p_1$  et  $q_1$  attribuent au plus mauvais résultat semblent jouer dans le même sens que le premier. C'est par boutade que la guillotine sert à désigner ce résultat – 0 F irait aussi bien.

Le contre-exemple a disparu de la mémoire collective, mais les premiers auteurs le repéraient très bien. Savage ([1972], p. 101) veille à le citer dans le passage bien connu où il récuse le paradoxe d'Allais. Moskowitz [1974] le fait entrer dans une expérience. MacCrimmon et Larsson [1979] en font état, et un autre contemporain, Baret (dans le recueil de Borch et Mossin [1968], p. 28) en fait une source du paradoxe, alors qu'Allais, pour sa part, ne s'y réfère pas. L'échange entre Allais [1957] et Morlat [1957] porte sur un autre sujet, quoiqu'il traite encore de l'hypothèse de l'utilité attendue et de ses fondements.

### ANNEXE III

#### LA RÉPONSE DE SAVAGE À ALLAIS ET LES DEUX REPRÉSENTATIONS DU PARADOXE

Dans un passage bien connu, Savage ([1972], p. 101-104) revient sur le contre-exemple d'Allais, qu'il reproduit avec d'autres montants et les mêmes valeurs de probabilité, avoue s'être laissé prendre aux choix paradoxaux  $(p_1, q_2)$ , puis affirme qu'une réflexion plus soutenue l'a conduit, cette fois irrévocablement, aux choix  $(p_1, q_1)$ , qui sont conformes à l'hypothèse de l'utilité attendue qu'il défend<sup>64</sup>. Au-delà de l'application particulière, Savage propose le moyen suivant de traiter d'une « théorie normative » : la replacer « dans les situations où (elle) semble faire commettre une erreur » et « décider pour chaque cas au moyen de la réflexion – la déduction sera normalement peu pertinente – si l'on maintient son impression initiale ou si l'on accepte les implications de la théorie sur ce cas » (p. 102).

Ces lignes reprennent sommairement, mais clairement, le principe de l'« équilibre réfléchi » (*reflective equilibrium*) que la philosophie morale, et même la réflexion morale ordinaire, s'appliquent à elles-mêmes depuis toujours. Il est appréciable que Savage ait reconnu l'importance du procédé, qui rattache fermement la théorie de la décision aux autres disciplines normatives. Le travail des premiers expérimentateurs, et les propositions qu'il nous a inspirées, lui font place aussi, mais en *l'extériorisant et en le subordonnant*, ce qui fait la différence avec son usage immédiat chez Savage. Dans les schémas envisagés, c'est le sujet qui recherche l'« équilibre réfléchi », et l'expérimentateur s'efforce de le constater du dehors, en recourant à certains critères de cohérence. En outre, s'il le constate, l'expérimentateur ne l'endosse pas toujours, ne serait-ce que parce que deux sujets peuvent arriver à des équilibres distincts ; ainsi, le procédé n'a qu'une influence

64. Nous citons l'édition de 1972 des *Foundations*, mais celle de 1954 contenait déjà le raisonnement qui suit.

indirecte sur son jugement final. Chez Savage, les deux personnages que nous distinguons ne font qu'un, et la démarche s'apparente à une introspection (le mot figure p. 101). Une différence supplémentaire, peut-être moins importante, est que les sujets partent des choix, c'est-à-dire des exemples particuliers, pour les mettre en conformité avec des règles générales, alors que Savage, en suivant d'ailleurs la pensée morale ordinaire, va dans la direction opposée.

On cite souvent la réponse de Savage à contre-emploi. En effet, la théorie de la décision actuelle projette sur ses antécédents historiques une reconstruction abusive, d'après laquelle l'axiomatique de von Neumann-Morgenstern se serait d'abord exposée sur le terrain empirique, aurait subi le choc des réfutations, elles aussi empiriques et dont le paradoxe d'Allais constituerait le modèle, et se serait alors repliée sur le terrain normatif où elle aurait su, avec plus ou moins de bonheur, se défendre jusqu'à ce jour. La réponse de Savage correspondrait justement au tournant stratégique. Une lecture attentive des premiers auteurs montre que, à l'exception notable de Friedman, ils privilégiaient dès l'origine des interprétations normatives, étant bien convaincus que le destin empirique de la théorie était déjà tranché. Nous avons vu que cette attitude inspirait la majorité des participants au colloque de 1952, y compris Savage, dont la communication a déjà la tonalité normative caractéristique de sa réponse à Allais. La thèse du revirement stratégique bute sur le point de fait que cette communication précède l'attaque en règle d'Allais et sur le point de logique que Savage ne pouvait pas lire des réfutations empiriques dans des contre-exemples que son adversaire ne voulait pas présenter ainsi<sup>65</sup>.

Si la réponse de Savage importe finalement, c'est pour une raison technique plutôt que conceptuelle. Avec elle débute un type de discussion normative du paradoxe qui joue sur l'équivoque de deux représentations possibles, l'une *fondée sur les seules valeurs de probabilité*, l'autre *fondée en outre sur une liste d'états du monde*, les probabilités étant réparties entre ces états. Savage prétend que sa méditation introspective l'a conduit à une reformulation éclairante des deux problèmes de choix du paradoxe. Il suppose qu'une loterie comporte cent billets équiprobables et affectés des lots suivants :

	Billet 1	Billets 2-11	Billets 12-100
$p_1^*$	500 000 \$	500 000 \$	500 000 \$
$q_1^*$	0	2 500 000 \$	500 000 \$
$p_2^*$	500 000 \$	500 000 \$	0
$q_2^*$	0	2 500 000 \$	0

Lorsqu'il est confronté au choix entre  $p_1^*$  et  $q_1^*$ , Savage ne considère que les billets 1-11, puisque les billets 12-100 ne permettent pas de différencier les deux options, et il procède encore ainsi lorsqu'il est confronté au choix entre  $p_2^*$  et  $q_2^*$  ; or ce tronçage des options a pour effet de rendre les deux problèmes de choix identiques ; il est donc impossible qu'il choisisse autrement que  $(p_1^*, p_2^*)$  ou  $(q_1^*, q_2^*)$ , et en l'occurrence, il dit préférer  $(p_1^*, p_2^*)$ .

Comme Hagen [1972] l'a indiqué, le raisonnement de Savage est spécieux parce que d'autres affectations des lots aux billets respectent les données probabilistes, mais interdisent de conclure à l'identité des problèmes des choix. Dans l'exemple qui suit, on a conservé l'affectation des billets  $p_1^*, p_2^*$  et  $q_1^*$ , mais on a modifié  $q_2^*$  en faisant porter les dix chances de gain par les billets 91-100 au lieu des billets 12-11 :

65. La thèse du « repli sur le normatif » (*normative retreat*) a migré de la théorie de la décision vers ses historiens. Solide à d'autres égards, l'étude de Jallais et Pradier ([2005], p. 34) y cède regrettablement. Bourgeois-Gironde et Giraud ([2008], p. 64) y sacrifient de même. Il resterait à comprendre d'où provient cette reconstruction.

	Billet 1	Billets 2-11	Billets 12-90	Billets 91-100
$p_1^*$	500 000 \$	500 000 \$	500 000 \$	500 000 \$
$q_1^*$	0	2 500 000 \$	500 000 \$	500 000 \$
$p_2^*$	500 000 \$	500 000 \$	0	0
$q_2^*$	0	0	0	2 500 000 \$

Il suffit de cette modification pour que les problèmes de choix restent différents, une fois élaguées les parties communes (ici les seuls billets 12-90). Pour le dire abstraitement, Savage n'applique l'axiome d'indépendance (A3) qu'à une *transcription particulière des probabilités en états du monde*. Or l'axiome s'applique à toutes les transcriptions possibles, en particulier celles où il perd sa justification intuitive. Allais ([1979], p. 533-536) reprend cette analyse à son compte lorsqu'il répond à la réponse de Savage.

MacCrimmon [1968] suit malencontreusement Savage lorsqu'il réalise sa première expérience. Il considère une urne contenant 100 boules équiprobables et il propose aux sujets les choix suivants :

	Boules 1-10	Boule 11	Boules 12-100
Investissement $p_1^*$	500 % de rendement	faillite	5 % de rendement
Investissement $q_1^*$	5 % de rendement	5 % de rendement	5 % de rendement
Investissement $p_2^*$	500 % de rendement	faillite	faillite
Investissement $q_2^*$	5 % de rendement	5 % de rendement	faillite

Le même auteur fait sans le dire amende honorable dans l'article avec Larsson ([1979], p. 362), qui revient à la formulation probabiliste correcte du paradoxe. Les résultats fort différents pour celui-ci qu'obtiennent un article et l'autre doivent pour partie s'expliquer par cette modification. Il va de soi qu'elle ne met pas en cause un simple « effet de cadrage », mais une vraie différence conceptuelle<sup>66</sup>.

Il ne semble pas qu'on ait rapproché les arguments de Savage et de Samuelson alors qu'ils partagent en fait la même faiblesse logique. En effet, aux objections de l'annexe 1, on peut ajouter maintenant celle-ci : la reformulation dynamique de l'indépendance, telle que Samuelson la propose, revient à transposer arbitrairement les probabilités en états du monde. Au lieu de placer les loteries  $p$  et  $q$  sur un événement de probabilité  $\alpha$  et la loterie  $r$  sur son complémentaire, on peut répartir les trois loteries sur une partition de quatre événements qui respecte les valeurs de probabilités, mais bloque le raisonnement ultérieur :

	$E$ de prob $\alpha-\varepsilon$	$F$ de prob $\varepsilon$	$G$ de prob $\varepsilon$	$H$ de prob $1-\alpha-\varepsilon$
Loterie $\alpha p + (1-\alpha)r$	$p$	$r$	$p$	$r$
Loterie $\alpha q + (1-\alpha)r$	$q$	$q$	$r$	$r$

66. Tversky et Kahneman [1992] ont testé une variante du paradoxe d'Allais qui explicite les états du monde à la manière de Savage et de MacCrimmon en 1968 et trouvé un taux de violation toujours important.